

Primitives : intégrer pour remonter la dérivée

La fiche M4 a appris à **descendre** : partant d'une grandeur, sa dérivée donne sa **vitesse de variation**. Mais en physique, la situation est souvent **inverse** : on connaît la vitesse à laquelle une grandeur varie, et on voudrait retrouver la grandeur elle-même. Il faut donc savoir **remonter** la dérivée. Chercher cette fonction s'appelle chercher une **primitive**, ou **intégrer**. Cette opération réserve une surprise : elle ne donne pas *une* réponse, mais une **infinité**.

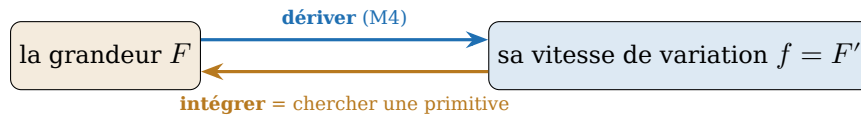
1. La primitive : l'opération inverse de la dérivée

Primitive d'une fonction

Une fonction F est une **primitive** de la fonction f lorsque **dériver** F **redonne** f :

$$F' = f.$$

Intégrer f , c'est chercher ses primitives. En physique, l'instruction « intégrer $f(t)$ par rapport au temps » signifie donc : trouver les fonctions $F(t)$ dont la dérivée vaut $f(t)$.



Dans cette fiche, le mot **intégrer** signifie donc simplement chercher « quelle fonction, une fois dérivée, donne celle-ci? ». Le §5 montrera comment cette recherche permet aussi de calculer une aire représentant une variation physique. Et comme on sait dériver, on sait **toujours vérifier** sa réponse.

Exemple. $F(t) = 3t$ est une primitive de $f(t) = 3$. Vérification : $(3t)' = 3$.

2. La surprise : il y en a une infinité

Reprenons l'exemple. $F(t) = 3t$ convient. Mais $F(t) = 3t + 5$ aussi :

$$(3t + 5)' = 3 + 0 = 3.$$

Et $3t - 12$ ou $3t + \pi$ également. **La dérivée d'une constante étant nulle**, on peut ajouter n'importe quel nombre sans rien changer.

Ensemble des primitives

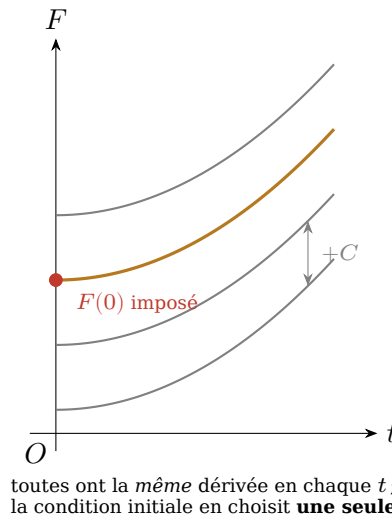
Sur un intervalle, si F est une primitive de f , alors **toutes** les fonctions

$$F(t) + C \quad (C \text{ constante quelconque})$$

sont aussi des primitives de f — et il n'y en a pas d'autres.

On ne dit donc jamais « **la** » primitive, mais « **une** » primitive.

Graphiquement, ces primitives forment une **famille de courbes parallèles** : la même courbe, translatée verticalement. En chaque abscisse, elles ont toutes **la même pente** — c'est bien pour cela qu'elles ont toutes la même dérivée.



Exemple. Les fonctions t^2 , $t^2 + 1$ et $t^2 - 7$ ont toutes pour dérivée $2t$: ce sont trois primitives de $f(t) = 2t$.

3. Les primitives dont on a besoin

Il n'en faut que très peu. On les obtient toutes en lisant **à l'envers** le tableau des dérivées de la fiche M4.

Outil mathématique

Fonction $f(t)$	Une primitive $F(t)$
k (constante)	$kt + C$
kt	$\frac{1}{2}kt^2 + C$
$at + b$	$\frac{1}{2}at^2 + bt + C$

Outil mathématique

Règle de la somme : une primitive d'une somme est la **somme** des primitives (on traite chaque terme séparément).

Réflexe : toujours **vérifier en dérivant** le résultat.

Exemple. Une primitive de $f(t) = 6t$ est $F(t) = 3t^2 + C$. Vérification : $(3t^2)' = 3 \times 2t = 6t$.

Exemple. Une primitive de $f(t) = -10t + 4$ est $F(t) = -5t^2 + 4t + C$. Vérification : $(-5t^2 + 4t)' = -10t + 4$.

4. Lever l'indétermination : la condition initiale

C'est **le** point qu'il faut comprendre. Une infinité de primitives, c'est beaucoup trop : en physique, la grandeur cherchée est **une** fonction bien précise. Ce qui choisit la bonne, c'est une **informa-**

tion supplémentaire — la valeur de F à un instant connu, presque toujours $t = 0$. On l'appelle la **condition initiale**.

Sur la figure du §2 : toutes les courbes ont la même forme, mais **une seule** passe par le point imposé. La condition initiale, c'est ce point.

Outil mathématique

Méthode — déterminer la constante

1. Écrire la primitive **avec sa constante** : $F(t) = \dots + C$. (Ne jamais l'oublier : c'est l'erreur la plus fréquente.)
2. Écrire la **condition initiale** donnée par l'énoncé, par exemple $F(0) = F_0$.
3. **Remplacer** t par 0 dans l'expression et **résoudre** en C .
4. **Réécrire** $F(t)$ avec la valeur trouvée : c'est la réponse.

Exemple. Cherchons la primitive F de $f(t) = 4$ qui vérifie $F(0) = 5$.

1. $F(t) = 4t + C$.
2. Condition : $F(0) = 5$.
3. $F(0) = 4 \times 0 + C = C$, donc $C = 5$.
4. $F(t) = 4t + 5$.

Vérification : $F' = 4$ et $F(0) = 5$.

Exemple. Même chose avec $f(t) = -3t + 4$ et $F(0) = 2$: $F(t) = -1,5t^2 + 4t + C$; $F(0) = C = 2$; d'où $F(t) = -1,5t^2 + 4t + 2$.

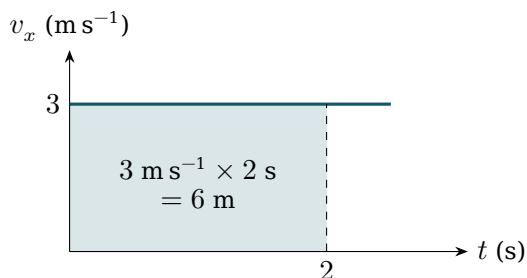
Remarque. Dans les expressions choisies ci-dessus, les termes qui dépendent de t s'annulent à $t = 0$: la constante est alors la valeur initiale. En général, on remplace la date connue dans l'expression pour déterminer la constante, y compris si cette date vaut zéro.

5. Retrouver une variation : le lien entre primitive et aire

Nous savons maintenant retrouver une fonction à partir de sa dérivée. En physique, on pose souvent une question plus courte : de combien une grandeur a-t-elle varié entre deux dates ? Prenons une vitesse connue et cherchons le déplacement qu'elle produit. Un même exemple va relier le calcul d'une primitive à la lecture d'une aire sur un graphe.

5.1 À vitesse constante : un rectangle donne le déplacement

Un mobile avance à $v_x = 3 \text{ m s}^{-1}$ pendant 2 s. Son déplacement vaut $\Delta x = v_x \Delta t = 3 \times 2 = 6 \text{ m}$. Sur le graphe de la vitesse en fonction du temps, la région comprise entre la droite, l'axe du temps et les dates 0 et 2 s est un rectangle.

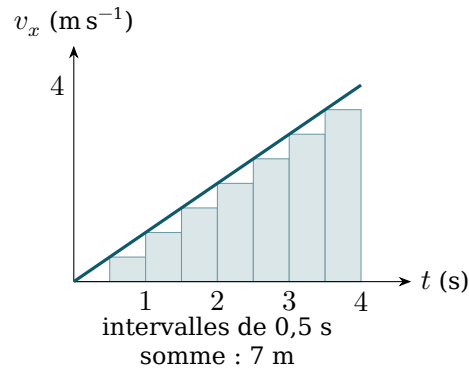
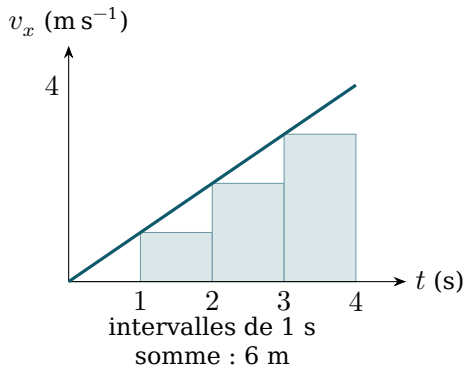


Sa base représente une durée, sa hauteur une vitesse. Le produit qui calcule son aire est donc exactement celui qui calcule le déplacement. Les unités des axes donnent $(\text{m s}^{-1}) \times \text{s} = \text{m}$: on obtient une longueur, même si l'on parle de l'aire d'une région du graphe.

5.2 Si la vitesse varie : additionner de petits déplacements

Pour une vitesse variable, on découpe la durée en petits intervalles. Sur chacun, on approche la vitesse par une valeur constante ; le petit déplacement est alors approché par l'aire d'un rectangle. En additionnant les déplacements, on additionne ces rectangles. Lorsque le découpage devient de plus en plus fin, la somme approche le déplacement réel et l'aire sous la courbe.

Prenons $v_x(t) = t$, en unités SI, entre 0 et 4 s. Avec la vitesse au début de chaque intervalle de 1 s, on obtient $(0 + 1 + 2 + 3) \times 1 = 6$ m. Avec des intervalles de 0,5 s, on obtient $(0 + 0,5 + 1 + 1,5 + 2 + 2,5 + 3 + 3,5) \times 0,5 = 7$ m.



Les rectangles sous-estiment ici le déplacement, car la vitesse augmente. En affinant encore le découpage, leur somme tend vers l'aire du triangle entier : $4 \times 4/2 = 8$ m.

5.3 Pourquoi une primitive retrouve-t-elle cette aire ?

Appelons $A(t)$ le déplacement accumulé depuis une date de départ t_1 jusqu'à la date t . Si l'on avance la date finale d'une petite durée h , on ajoute une bande sous la courbe de vitesse. Son aire est proche de $v_x(t)h$. Ainsi,

$$\frac{A(t+h) - A(t)}{h} \simeq v_x(t).$$

Lorsque h tend vers zéro, pour une vitesse continue, ce rapport tend vers $v_x(t)$. C'est la définition de la dérivée vue dans **M4** : $A'(t) = v_x(t)$. **Le déplacement accumulé est donc une primitive de la vitesse.**

Si F est une autre primitive de la même vitesse, A et F ne diffèrent que d'une constante. Au départ, rien n'est encore accumulé : $A(t_1) = 0$. Il faut donc retrancher $F(t_1)$ à $F(t)$ pour obtenir $A(t)$.

Outil mathématique

Si F est une primitive de la vitesse v_x , le déplacement entre les dates t_1 et t_2 vaut

$$\Delta x = F(t_2) - F(t_1).$$

Cette différence donne l'aire algébrique sous le graphe de vitesse entre les deux dates. Ajouter une constante à F ne change pas le résultat : elle disparaît dans la soustraction.

Dans l'exemple $v_x(t) = t$, une primitive est $F(t) = t^2/2$. Entre 0 et 4 s, $F(4) - F(0) = 4^2/2 - 0 = 8$ m : nous retrouvons exactement l'aire du triangle. Entre 1 et 3 s, $F(3) - F(1) = (9 - 1)/2 = 4$ m. Sur le graphe, cette région est un trapèze de largeur 2 s et de hauteurs 1 et 3 m s⁻¹ : son aire vaut aussi $(1 + 3) \times 2/2 = 4$ m.

5.4 Sous l'axe : une aire à compter avec son signe

Une vitesse algébrique peut être négative. Les petits déplacements sont alors négatifs eux aussi : le mobile se déplace vers les coordonnées décroissantes. La région située sous l'axe du temps contribue donc avec un signe moins. On parle d'**aire algébrique**.

Une aire géométrique reste positive ; le signe vient de la grandeur qu'elle représente. Pour $v_x = -2 \text{ m s}^{-1}$ pendant 3 s, le rectangle a une aire de 6 m avec les unités des axes, mais le déplacement vaut -6 m . La distance parcourue est de 6 m.

Si la vitesse change de signe, on sépare les intervalles au changement de sens. Pour le déplacement total, on additionne les contributions signées. Pour la distance parcourue, on additionne leurs valeurs absolues. Un trajet de $+8 \text{ m}$ suivi d'un trajet de -2 m donne ainsi un déplacement de 6 m et une distance de 10 m.

5.5 Du déplacement à la position finale

Reprenons $v_x(t) = t$ entre 0 et 4 s. La fonction $F(t) = t^2/2$ est une primitive ; la différence $F(4) - F(0) = 8 \text{ m}$ est un déplacement. Pour connaître la position finale, il reste à savoir où le mobile se trouvait au départ.

S'il part de $x(0) = 3 \text{ m}$, alors $x(4) = 3 + 8 = 11 \text{ m}$. La recherche de la constante, étudiée au §4, donne le même résultat pour toutes les dates : $x(t) = 3 + t^2/2$.

Outil mathématique

Une primitive est une **fonction**. La différence de ses valeurs à deux dates donne une **variation**. Pour obtenir la valeur finale de la grandeur physique, on ajoute sa valeur initiale :

$$x(t_2) = x(t_1) + [F(t_2) - F(t_1)].$$

Le graphe de vitesse suffit donc pour calculer le déplacement. Une position connue est nécessaire pour situer le mobile. Cette distinction permet de passer du calcul d'une primitive à l'aire sous une courbe, puis de l'aire à la grandeur physique demandée.

Pièges fréquents

- **Oublier la constante.** C'est l'erreur numéro un. Tant que la condition initiale n'a pas été utilisée, le $+C$ doit figurer.
- **Dire « la » primitive.** Il y en a une infinité ; on dit « **une** primitive », et on parle de « la primitive **telle que** $F(0) = \dots$ ».
- **Croire que C vaut toujours la valeur initiale.** Dans les exemples ci-dessus, les autres termes s'annulent à $t = 0$. En général, remplacer la date connue dans l'expression et résoudre.
- **Se tromper de constante avec deux intégrations.** Deux remontées $\Rightarrow$ **deux** constantes et **deux** conditions ; on détermine C_1 **avant** C_2 .
- **Oublier le facteur $\frac{1}{2}$.** Une primitive de kt est $\frac{1}{2}kt^2$, pas kt^2 — vérifier en dérivant lève le doute en trois secondes.
- **Confondre les deux sens.** Dériver **descend**, la primitive **remonte** : en cas d'hésitation, dériver sa réponse doit redonner le point de départ.

6. Auto-test

Répondez avant de regarder les corrigés.

1. Vérifier que $F(t) = 5t$ est une primitive de $f(t) = 5$. En existe-t-il d'autres ? Lesquelles ?

2. Donner une primitive de $f(t) = 8t$.
3. Déterminer la primitive F de $f(t) = -3t + 4$ telle que $F(0) = 2$.
4. Pourquoi ne peut-on pas parler de « la » primitive d'une fonction ?
5. Un élève écrit : « une primitive de $f(t) = 2t$ est $F(t) = 2t^2$ ». Où est l'erreur, et comment l'aurait-il détectée seul ?
6. Pour $v_x(t) = t$, en unités SI, entre 1 et 3 s, calculer le déplacement par une primitive et par l'aire d'un trapèze.
7. Avec cette même vitesse, si $x(1) = 5$ m, quelle est la position à 3 s ?
8. Un mobile parcourt un premier trajet de déplacement +8 m, puis un second de déplacement -2 m, sans changer de sens à l'intérieur de chaque trajet. Donner le déplacement total et la distance parcourue.

Corrigés

1. $(5t)' = 5 = f(t)$. Oui : **toutes** les fonctions $F(t) = 5t + C$, pour n'importe quelle constante C .
2. $F(t) = 4t^2$ (ou $4t^2 + C$). Vérification : $(4t^2)' = 8t$.
3. $F(t) = -1,5t^2 + 4t + C$; $F(0) = C = 2$; d'où $F(t) = -1,5t^2 + 4t + 2$.
4. Parce qu'il y en a une **infinité** : elles diffèrent d'une constante (la dérivée d'une constante étant nulle). Il faut une **condition initiale** pour en désigner une seule.
5. $(2t^2)' = 4t$, et non $2t$: il manque le facteur $\frac{1}{2}$ — la bonne réponse est $F(t) = t^2 + C$. Il l'aurait détecté **en dérivant sa réponse** : c'est le réflexe de vérification systématique.
6. Avec $F(t) = t^2/2$, $F(3) - F(1) = (9 - 1)/2 = 4$ m. Le trapèze a une largeur de 2 s et des hauteurs de 1 et 3 mètres par seconde : son aire vaut $(1 + 3) \times 2/2 = 4$ m.
7. $x(3) = x(1) + 4 = 9$ m. Le déplacement est de 4 m ; la position finale est de 9 m.
8. Déplacement : $8 - 2 = 6$ m. Distance : $8 + 2 = 10$ m.