

La dérivée d'une fonction

La physique-chimie passe son temps à mesurer des grandeurs **qui évoluent** : une concentration qui diminue, une position qui change, une température qui monte. La question naturelle est alors « **à quelle vitesse ?** ». L'outil mathématique qui répond à cette question est la **dérivée**. Cette fiche la construit à partir de zéro, d'abord avec les yeux (une pente sur un graphe), puis avec une calculatrice (un tableau de mesures), sans rien supposer du cours de maths.

1. La pente d'une droite : rappel

Sur un graphe, une droite est caractérisée par son **coefficient directeur** (sa **pente**) : la variation de la grandeur portée en ordonnée quand celle portée en abscisse augmente d'une unité. Entre deux points $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ de la droite :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Deux réflexes à garder de ce rappel :

- la pente se calcule avec les **unités des axes** (jamais « en centimètres » sur le papier) ;
- elle a donc une **unité** : celle de y divisée par celle de x .

Exemple. Une droite d'étalonnage passe par $(0; 0)$ et par $(5,0 \text{ mmol}\cdot\text{L}^{-1}; 1,2)$ (absorbance sans unité) : sa pente vaut $m = 1,2/5,0 = 0,24 \text{ L}\cdot\text{mmol}^{-1}$.

2. Le taux de variation entre deux points

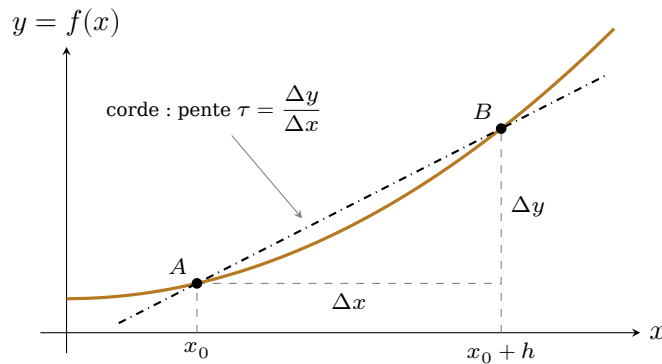
Quand la courbe n'est **pas** une droite, on peut toujours calculer la pente de la **corde** qui relie deux de ses points.

Taux de variation

Le **taux de variation** d'une fonction f entre x_0 et $x_0 + h$ est la pente de la corde reliant les points $A(x_0; f(x_0))$ et $B(x_0 + h; f(x_0 + h))$ de la courbe :

$$\tau = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Il mesure la variation **moyenne** de f entre les deux points.



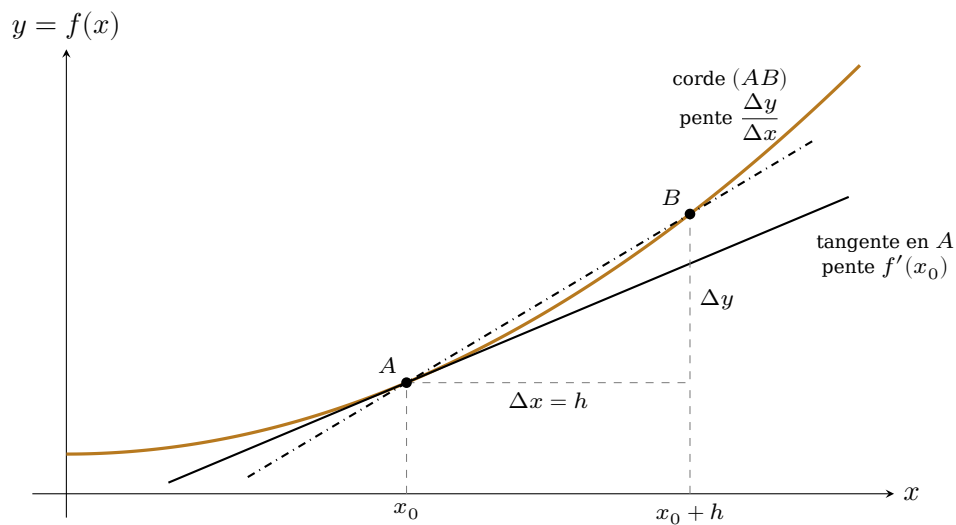
Exemple. Une voiture est passée à la borne $d = 15$ m à $t = 2,0$ s et à la borne $d = 48$ m à $t = 5,0$ s. Le taux de variation de la distance vaut

$$\tau = \frac{48 - 15}{5,0 - 2,0} = 11 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} :$$

c'est sa **vitesse moyenne** entre ces deux instants — qui ne dit rien de sa vitesse à un instant précis (elle a pu accélérer puis freiner).

3. La dérivée : la pente de la tangente

Pour obtenir une vitesse de variation **à un instant précis** (« instantanée » et non plus moyenne), on rapproche les deux points l'un de l'autre : on fait tendre h vers zéro.



Quand h diminue, le point B glisse le long de la courbe vers le point A, et la corde (AB) **pivote** autour de A. À la limite, quand B est infiniment proche de A, la corde vient s'appuyer sur la courbe : c'est la **tangente** à la courbe en A.

Dérivée en un point

La **dérivée** de f en x_0 , notée $f'(x_0)$, est la valeur limite du taux de variation quand h tend vers 0 :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Le dénominateur est $h = (x_0 + h) - x_0 = \Delta x$, **graphiquement $f'(x_0)$ est donc le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse x_0** . Elle mesure la vitesse de variation de f en ce point précis.

Pour **lire une dérivée sur un graphe**, on trace (à la règle) la tangente au point considéré, on choisit deux points **éloignés** de cette droite, et on calcule sa pente avec les unités des axes.

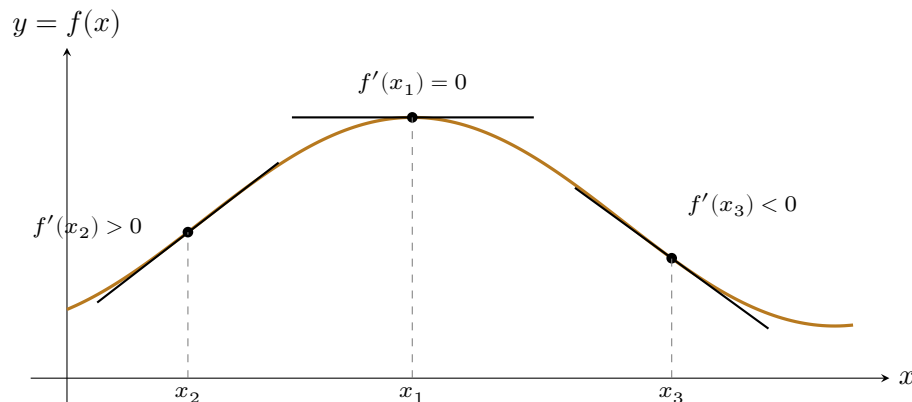
Exemple. Sur l'enregistrement de la distance parcourue $d = f(t)$, la tangente à la courbe au point d'abscisse $t = 4,0$ s passe par les points (2,0 s ; 5,0 m) et (7,0 s ; 45 m). La dérivée en cet instant vaut donc

$$f'(4,0) = \frac{45 - 5,0}{7,0 - 2,0} = 8,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} :$$

c'est la **vitesse instantanée** de la voiture à $t = 4,0$ s — celle qu'affiche son compteur.

4. Lire le signe et les variations

La tangente suit la courbe : son inclinaison raconte les variations de la fonction.



Outil mathématique

- Fonction **croissante** autour de $x_0 \Rightarrow$ tangente qui « monte » $\Rightarrow f'(x_0) > 0$.
- Fonction **décroissante** $\Rightarrow$ tangente qui « descend » $\Rightarrow f'(x_0) < 0$.
- **Extremum** (maximum ou minimum) $\Rightarrow$ tangente horizontale $\Rightarrow f'(x_0) = 0$.
- Plus la fonction varie **rapidement**, plus la tangente est **inclinée** et plus $|f'(x_0)|$ est grand.

Exemple. Une courbe d'évolution qui grimpe vite au départ puis s'aplatit en approchant d'un palier : la dérivée est **positive et maximale à l'origine**, puis **diminue vers zéro** — au palier, plus rien ne varie.

5. La notation de la physique : $\frac{dY}{dX}$ et son unité

Les mathématiciens dérivent des fonctions $f(x)$ et notent f' . En physique-chimie, on dérive des **grandeurs** les unes par rapport aux autres, et on préfère une notation qui garde la trace des **deux** grandeurs.

Dérivée d'une grandeur par rapport à une autre

La dérivée d'une grandeur Y par rapport à une grandeur X se note

$$\frac{dY}{dX} \quad (\text{« dY sur dX »}),$$

héritière directe du taux de variation $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$ pour des variations devenues infiniment petites.

- Elle indique **par rapport à quoi** on dérive (indispensable si Y dépend de plusieurs grandeurs);
- elle affiche son **unité** : celle de Y divisée par celle de X .

Exemple. Pour une position x en mètres fonction du temps t en secondes, $\frac{dx}{dt}$ s'exprime en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$: c'est une vitesse. Pour un suivi $\text{pH} = f(V)$ au cours d'un ajout de volume V en mL, $\frac{d\text{pH}}{dV}$ s'exprime en mL^{-1} (le pH n'a pas d'unité).

6. Estimer une dérivée dans un tableau de mesures

Au laboratoire, on n'a pas la courbe : on a des **points de mesure** espacés. Entre deux points consécutifs, h est petit sans être infiniment petit : le taux de variation donne alors une **estimation** de la dérivée.

Outil mathématique

Pour estimer la dérivée de $Y(X)$ à la date X_i d'un tableau de mesures :

1. calculer le taux de variation entre le point considéré et le point suivant (X_{i+1} ; Y_{i+1}) :

$$\frac{dY}{dX}(X_i) \simeq \frac{Y_{i+1} - Y_i}{X_{i+1} - X_i};$$

2. donner le résultat **avec son unité** (celle de Y par celle de X).

L'estimation est d'autant meilleure que les points sont rapprochés.

Exemple. Suivi du pH au cours d'un ajout :

V (mL)	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
pH	4,3	4,3	4,4	4,5	4,7	5,0

À $V_0 = 1,5$ mL :

$$\frac{d\text{pH}}{dV}(V_0) \simeq \frac{4,7 - 4,5}{2,0 - 1,5} = 0,4 \text{ mL}^{-1}.$$

C'est exactement ce calcul, répété sur tous les points, qu'on confie à un tableur ou à un programme Python pour tracer la courbe de la dérivée.

7. Dériver une expression : les formules utiles

Quand la grandeur est donnée par une **formule**, la dérivée se calcule sans graphe. Les seules formules nécessaires au bac (a et b désignent des constantes) :

Outil mathématique

Fonction	Dérivée
$f(t) = b$ (constante)	$f'(t) = 0$
$f(t) = a \cdot t$	$f'(t) = a$
$f(t) = t^2$	$f'(t) = 2t$
$f(t) = t^3$	$f'(t) = 3t^2$

et les règles de combinaison (u et v désignent des fonctions) :

Opération	Dérivée
$u + v$	$u' + v'$
$u \cdot v$	$u' \cdot v + u \cdot v'$
$a \cdot u$ (cas particulier du produit)	$a \cdot u'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
$\frac{1}{v}$ (cas particulier du quotient)	$-\frac{v'}{v^2}$

Exemple. L'altitude d'un ballon est modélisée par $z(t) = -4,9t^2 + 20t + 1,0$ (z en m, t en s). Sa vitesse verticale est la dérivée

$$\frac{dz}{dt} = -9,8t + 20,$$

soit $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ à $t = 1,0 \text{ s}$: le ballon monte encore, mais il a déjà ralenti.

Pièges fréquents

- **Ne pas confondre f et f'** : une grandeur peut être très grande et varier très lentement (dérivée quasi nulle), ou minuscule et varier très vite. La dérivée ne se lit pas sur la hauteur de la courbe, mais sur son **inclinaison**.
- La dérivée se lit sur la **tangente**, pas sur la corde qui joint le point à l'origine : la pente « y/x » n'a rien à voir avec $f'(x)$ en général.
- Une pente se calcule avec les **unités des axes**, jamais en mesurant des centimètres sur la feuille (les échelles des deux axes sont différentes).
- Ne pas oublier l'**unité** de la dérivée : celle de Y divisée par celle de X . Une « vitesse de variation » sans unité ne veut rien dire.
- Dans un tableau de mesures, le taux de variation entre deux points ne donne qu'une **estimation** de la dérivée — à dire explicitement sur la copie ($\simeq$, pas $=$).

Outil mathématique

Dérivée seconde. La deuxième dérivée f'' des maths s'écrit en notation physique, après deux applications consécutives de $\frac{dY}{dX}$:

$$\frac{d^2Y}{dX^2}$$

et mesure la variation de la variation — en mécanique, dériver deux fois la position donne l'accélération.

8. Auto-test

Répondez avant de regarder les corrigés.

1. La tangente à une courbe $y = f(x)$ au point d'abscisse $x_0 = 2,0$ passe par les points $(0; 3,0)$ et $(5,0; 13)$. Que vaut $f'(2,0)$?
2. La température d'une pièce monte pendant la matinée, atteint son maximum à $t = 10$ h, puis redescend. Donner le signe de $\frac{dT}{dt}$ à 8 h, à 10 h et à 15 h.
3. Un suivi donne : t (s) : 0; 10; 20; 30 — et c (mmol·L⁻¹) : 10,0; 7,8; 6,1; 4,8. Estimer $\frac{dc}{dt}$ à $t = 10$ s, avec son unité. Pourquoi le résultat est-il négatif ?
4. La position d'un mobile est $x(t) = 5,0t^2 - 3,0t + 2,0$ (x en m, t en s). Exprimer $\frac{dx}{dt}$, puis calculer sa valeur à $t = 2,0$ s.

Corrigés

1. Pente de la tangente : $f'(2,0) = \frac{13 - 3,0}{5,0 - 0} = 2,0$.
2. À 8 h, T croît : $\frac{dT}{dt} > 0$; à 10 h, maximum, tangente horizontale : $\frac{dT}{dt} = 0$; à 15 h, T décroît : $\frac{dT}{dt} < 0$.
3. Entre $t = 10$ s et $t = 20$ s : $\frac{dc}{dt} \simeq \frac{6,1 - 7,8}{20 - 10} = -0,17$ mmol·L⁻¹·s⁻¹. Le signe est négatif car c **diminue** au cours du temps (fonction décroissante).
4. $\frac{dx}{dt} = 10t - 3,0$, d'où, à $t = 2,0$ s : $10 \times 2,0 - 3,0 = 17$ m·s⁻¹.