

Les vecteurs

En physique, beaucoup de grandeurs ne se contentent pas d'un nombre. Dire qu'une voiture roule à $50 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ ne suffit pas : encore faut-il savoir **vers où**. Dire qu'on pousse une caisse avec une force de 200 N ne suffit pas : on peut la pousser vers l'avant, ou de travers, et le résultat n'est pas le même. L'objet mathématique qui porte à la fois une **valeur** et une **orientation** est le **vecteur**. Le vecteur est l'outil de toute la mécanique, et il vaut la peine d'y passer un peu de temps.

1. Pourquoi des vecteurs ?

Comparons deux sortes de grandeurs.

- La **masse** d'un objet (1,2 kg), sa **température** (20 °C), sa **durée** de chute (3,0 s) : un **nombre** (avec son unité) suffit à les décrire complètement. On les appelle des grandeurs **scalaires**.
- La **vitesse** d'un avion, la **force** exercée par un ressort, l'**accélération** d'une voiture : il faut en plus préciser **dans quelle direction** et **dans quel sens**. Ce sont des grandeurs **vectérielles**.

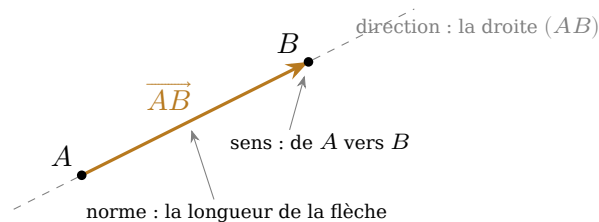
Grandeurs scalaires et vectorielles

Une grandeur **scalaire** est entièrement décrite par un **nombre** (et une unité). Une grandeur **vectérielle** exige en plus une **direction** et un **sens** : on la représente par un **vecteur**.

Exemple. Deux avions volent tous les deux à $800 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$: même **valeur** de vitesse. Mais l'un va vers Paris et l'autre vers Tokyo : leurs **vecteurs vitesse** sont différents. Le nombre seul, $800 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$, ne dit pas tout — c'est bien pour cela qu'il faut un vecteur.

2. Qu'est-ce qu'un vecteur ?

On représente un vecteur par une **flèche**. Trois informations, et trois seulement, le définissent.



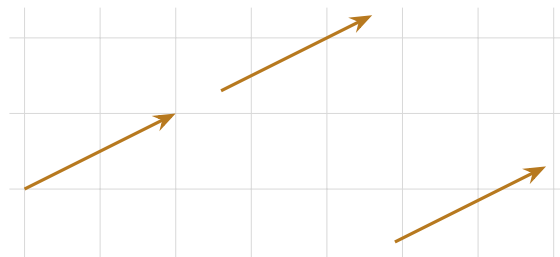
Caractéristiques d'un vecteur

Un **vecteur** est caractérisé par :

- sa **direction** : la droite qui le porte (par exemple « la verticale », ou « la droite (AB) »);
- son **sens** : sur cette droite, l'un des deux sens de parcours (indiqué par la **pointe** de la flèche);
- sa **norme** : la longueur de la flèche, c'est-à-dire la **valeur** de la grandeur (toujours positive).

Le vecteur qui va du point A au point B se note $\overrightarrow{AB}$; sa norme se note $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Un vecteur n'est pas attaché à un point. C'est un point souvent mal compris. Deux flèches dessinées à deux endroits différents représentent le **même** vecteur dès lors qu'elles ont **même direction, même sens et même norme**. Le vecteur, c'est le « déplacement », pas l'endroit où on le dessine.



trois flèches, **un seul et même vecteur** : mêmes direction, sens et norme

Exemple. Sur un plan, « avancer de 3 cases à droite et 2 cases en haut » est un vecteur. Que l'on parte du coin de la carte ou de son centre, c'est le même déplacement, donc le même vecteur.

Outil mathématique

Direction et sens, ce n'est pas la même chose. Une **direction** est une droite : elle offre **deux sens** opposés. « Verticale » est une direction ; « vers le haut » et « vers le bas » sont ses deux sens. Dire « le vecteur est dirigé vers le bas » mélange les deux ; on dit : « de direction verticale, de sens descendant ».

3. Additionner deux vecteurs

Additionner deux vecteurs, c'est **enchaîner** les deux déplacements : on place le second **au bout** du premier, et le résultat va du début du premier à la fin du second. C'est la **relation de Chasles**.

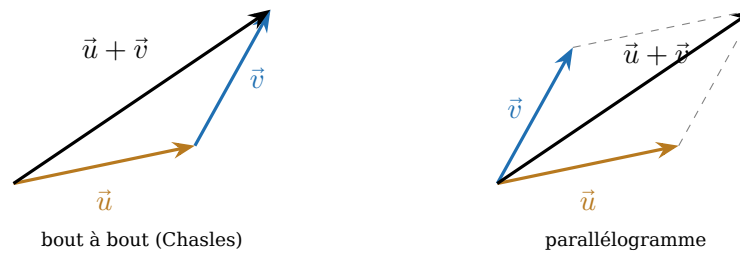
Relation de Chasles

Pour trois points A, B, C :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Pour additionner deux vecteurs, on **reporte le second à l'extrémité du premier** (à la règle et à l'équerre) ; la somme joint l'origine du premier à l'extrémité du second.

Comme un vecteur n'est pas attaché à un point (§2), on peut aussi les dessiner **à partir d'une même origine** et fermer le **parallélogramme** : on obtient exactement la même somme.



4. Multiplier par un nombre, soustraire

Multiplication d'un vecteur par un nombre

Le vecteur $k \cdot \vec{u}$ (avec k un nombre réel) a :

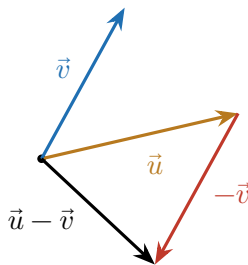
- la **même direction** que $\vec{u}$;
- le **même sens** si $k > 0$, le **sens opposé** si $k < 0$;
- une **norme** multipliée par $|k|$: $\|k \cdot \vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$.

En particulier, l'**opposé** $-\vec{u}$ a même direction et même norme que $\vec{u}$, mais le **sens contraire**.

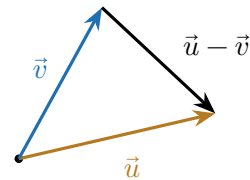
Soustraire, c'est ajouter l'opposé :

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}).$$

En pratique, il y a une construction bien plus commode. Dessinons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ à **partir d'une même origine** : alors $\vec{u} - \vec{v}$ est le vecteur qui va de **l'extrémité de $\vec{v}$** vers **l'extrémité de $\vec{u}$** . (C'est Chasles : $\vec{v} + (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}$.)



ajouter l'opposé : on reporte $-\vec{v}$
à l'extrémité de $\vec{u}$



même origine : $\vec{u} - \vec{v}$ va de la pointe de $\vec{v}$
à la pointe de $\vec{u}$

Exemple. Une voiture roule vers l'est à $\vec{v}_1$ ($20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$), puis, après un virage, vers le nord à $\vec{v}_2$ ($20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$). Sa vitesse a-t-elle changé ? La **norme** n'a pas bougé, mais le **vecteur**, si : la variation $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ n'est pas nulle. On la construit en traçant $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ à partir d'une même origine et en joignant la pointe de $\vec{v}_1$ à celle de $\vec{v}_2$. Sa norme vaut $\sqrt{20^2 + 20^2} = 28 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$: le changement est bien réel.

5. Repère et coordonnées

Les constructions à la règle, c'est bien ; **calculer**, c'est mieux. Pour cela on introduit un **repère**.

Base orthonormée

Une **base orthonormée** du plan est formée de deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$:

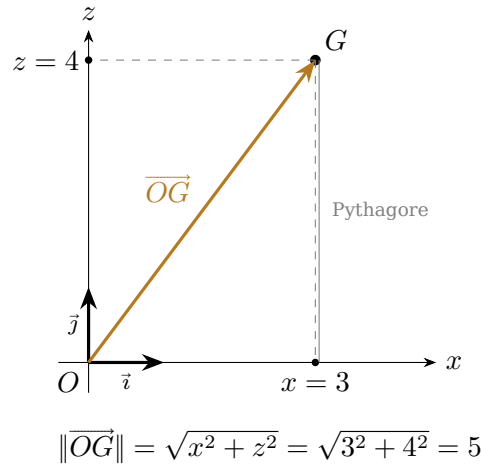
- **orthogonaux** (perpendiculaires) ;
- **normés** : de norme 1 (ce sont des **vecteurs unitaires**).

Associés à une origine O , ils forment le **repère** $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Tout vecteur se **décompose** alors de façon unique sur cette base (c'est encore Chasles) : il existe deux nombres x et z tels que

$$\overrightarrow{OG} = x \cdot \vec{i} + z \cdot \vec{j}.$$

Ces deux nombres sont les **coordonnées** du vecteur ; on les note en colonne : $\overrightarrow{OG} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$. Géométriquement, x et z se lisent en **projetant** la pointe du vecteur sur chacun des axes.



Outil mathématique

Tout se calcule sur les coordonnées. Si $\vec{u} \begin{pmatrix} u_x \\ u_z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} v_x \\ v_z \end{pmatrix}$, alors :

- somme : $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} u_x + v_x \\ u_z + v_z \end{pmatrix}$;
- opposé : $-\vec{u} \begin{pmatrix} -u_x \\ -u_z \end{pmatrix}$, et différence : $\vec{u} - \vec{v} \begin{pmatrix} u_x - v_x \\ u_z - v_z \end{pmatrix}$;
- multiplication : $k \cdot \vec{u} \begin{pmatrix} k u_x \\ k u_z \end{pmatrix}$;
- **norme** (Pythagore) : $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_x^2 + u_z^2}$.

Autrement dit : on additionne, on soustrait et on multiplie **coordonnée par coordonnée**.

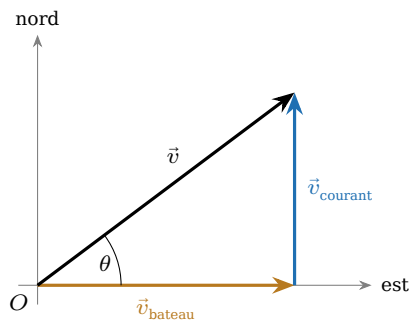
Exemple. Un bateau avance à $4,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ **vers l'est** ; le courant le porte à $3,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ **vers le nord**. Sa vitesse réelle est la **somme vectorielle** des deux. Prenons $\vec{i}$ vers l'est et $\vec{j}$ vers le nord :

$\vec{v}_{\text{bateau}} \begin{pmatrix} 4,0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_{\text{courant}} \begin{pmatrix} 0 \\ 3,0 \end{pmatrix}$. La somme a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 4,0 \\ 3,0 \end{pmatrix}$, et sa norme vaut

$$v = \sqrt{4,0^2 + 3,0^2} = \sqrt{16 + 9} = 5,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1},$$

dans une direction intermédiaire (vers le nord-est). Plus précisément, cette direction fait avec l'est (axe Ox) un angle θ que donne la **tangente** :

$$\tan \theta = \frac{v_z}{v_x} = \frac{3,0}{4,0} = 0,75, \quad \theta = \arctan(0,75) \approx 37^\circ.$$



Le bateau ne va donc **ni** à 4,0, **ni** à 7,0 m·s⁻¹ : les **normes ne s'additionnent pas** — seuls les vecteurs s'additionnent.

6. Le produit scalaire

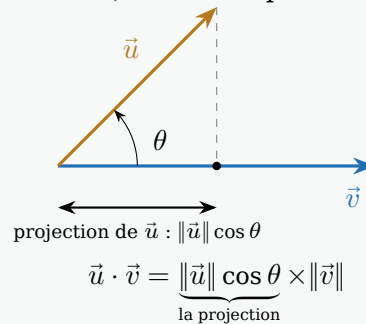
Voici l'opération qui manque : elle permet de **multiplier** deux vecteurs — mais, contrairement à tout ce qui précède, **son résultat est un nombre**, pas un vecteur. D'où son nom : produit *scalaire*.

Produit scalaire

Le **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le **nombre**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta,$$

où θ est l'angle entre les deux vecteurs (dessinés à partir d'une même origine).



Le produit scalaire réalise une projection. Le facteur $\|\vec{u}\| \cos \theta$ n'est autre que la **longueur de l'ombre** de $\vec{u}$ sur la direction de $\vec{v}$ (sa **projection**). Le produit scalaire mesure donc « ce que $\vec{u}$ fait dans la direction de $\vec{v}$ », multiplié par la norme de $\vec{v}$. Trois cas à retenir :

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **perpendiculaires** ($\theta = 90^\circ$) : $\cos 90^\circ = 0$, donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. (*L'ombre est nulle : $\vec{u}$ ne fait rien dans la direction de $\vec{v}$.*)
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de **même sens** ($\theta = 0$) : $\cos 0 = 1$, donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ — c'est le **maximum**.
- angle **obtus** ($\theta > 90^\circ$) : $\cos \theta < 0$, le produit scalaire est **négatif**.

Exemple. Deux vecteurs de normes $\|\vec{u}\| = 5,0$ et $\|\vec{v}\| = 3,0$, formant un angle $\theta = 60^\circ$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 5,0 \times 3,0 \times \cos 60^\circ = 5,0 \times 3,0 \times 0,50 = 7,5.$$

Le résultat est un **nombre**, sans flèche.

En coordonnées, le calcul est encore plus simple.

Outil mathématique

Si $\vec{u} \begin{pmatrix} u_x \\ u_z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} v_x \\ v_z \end{pmatrix}$ dans une base **orthonormée**, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_z v_z.$$

On multiplie les coordonnées deux à deux, et on additionne.

Exemple. $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 2 + 4 \times (-1) = 6 - 4 = 2$. Comme $\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0$, les deux vecteurs ne sont **pas** perpendiculaires. (Un produit scalaire nul est d'ailleurs le test le plus rapide de perpendicularité : $\vec{i} \cdot \vec{j} = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$ — les vecteurs de base sont bien perpendiculaires.)

6.1 Une coordonnée est un produit scalaire

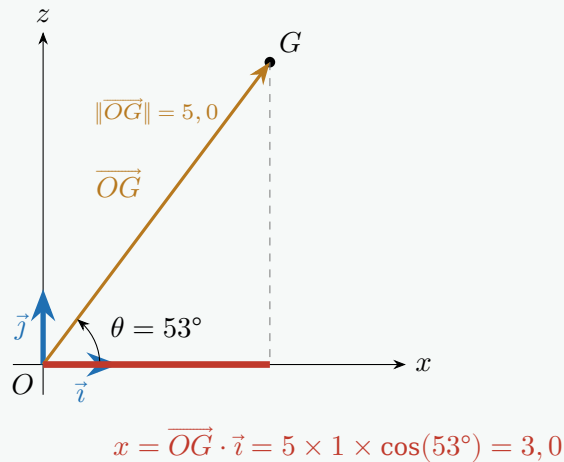
Projeter $\overrightarrow{OG}$ sur l'axe des x , c'est exactement calculer son produit scalaire avec le vecteur unitaire $\vec{i}$ qui **sous-tend** cet axe :

Coordonnées et projections

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les coordonnées d'un vecteur sont ses **produits scalaires avec les vecteurs de la base** :

$$x = \overrightarrow{OG} \cdot \vec{i} \quad \text{et} \quad z = \overrightarrow{OG} \cdot \vec{j}.$$

Une coordonnée est **une projection** et une projection n'est rien d'autre qu'un produit scalaire :

**7. La convention des physiciens**

Une dernière chose, purement pratique.

Outil mathématique

En mathématiques, la norme se note $\|\vec{u}\|$. En physique, on l'écrit plus simplement **sans flèche** : la norme du vecteur $\vec{v}$ se note v , celle de $\vec{F}$ se note F .

$$v = \|\vec{v}\|$$

Une lettre avec flèche est un vecteur ; la même lettre sans flèche est un nombre (sa norme). Écrire $\vec{v} = 5$ ou $v = \vec{v}$ n'a aucun sens : on écrit $v = 5,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ou $\|\vec{v}\| = 5,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Outil mathématique

Et en trois dimensions ? Tout ce qui précède se transpose sans changement à l'espace : la base devient $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les vecteurs ont trois coordonnées, la norme s'écrit $\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$ et le produit scalaire $u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$. Au lycée, on reste presque toujours dans le plan.

Pièges fréquents

- **Confondre le vecteur et sa norme.** $\vec{v}$ est une flèche, v est un nombre. Une égalité entre un vecteur et un nombre est toujours fausse.
- **Croire qu'un vecteur est attaché à un point.** Deux flèches dessinées à deux endroits différents sont **le même vecteur** si elles ont mêmes direction, sens et norme.
- **Additionner les normes.** $\|\vec{u} + \vec{v}\| \neq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ en général : le bateau du §5 va à $5,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, pas à $7,0$. Les normes ne s'additionnent que si les deux vecteurs ont **même direction et même sens**.
- **Confondre direction et sens.** Une direction (une droite) porte **deux** sens opposés.
- **Croire que le produit scalaire est un vecteur.** C'est un **nombre** — il peut d'ailleurs être **négatif** (angle obtus) ou **nul** (vecteurs perpendiculaires), ce qu'une norme ne peut jamais être.
- **Oublier que** $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$ **suppose une base orthonormée** : c'est toujours le cas au lycée, mais la formule n'est pas magique, elle vient de $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$.

8. Auto-test

Répondez avant de regarder les corrigés.

1. Parmi ces grandeurs, lesquelles sont vectorielles : la masse, la vitesse, la température, la force, la durée ?
2. Deux flèches ont même direction, même sens et même norme, mais sont dessinées à deux endroits différents de la feuille. Représentent-elles le même vecteur ?
3. Un nageur avance à $1,2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ perpendiculairement à la berge ; le courant l'entraîne à $1,6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ le long de la berge. Quelle est la **norme** de sa vitesse réelle ?
4. On donne $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$. Les vecteurs sont-ils perpendiculaires ?
5. On donne $\overrightarrow{OG} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$. Calculer $\|\overrightarrow{OG}\|$, puis vérifier par le calcul que $\overrightarrow{OG} \cdot \vec{i}$ redonne bien la coordonnée x .
6. Deux vecteurs de normes 2,0 et 5,0 font entre eux un angle de 120° . Que vaut leur produit scalaire ? Le signe était-il prévisible ?

Corrigés

1. Sont **vectorielles** : la **vitesse** et la **force** (il faut préciser direction et sens). Sont scalaires : la masse, la température, la durée.
2. **Oui** : un vecteur n'est pas attaché à un point. Mêmes direction, sens et norme $\Rightarrow$ même vecteur.
3. Les deux vitesses sont perpendiculaires, donc (Pythagore) $v = \sqrt{1,2^2 + 1,6^2}$, soit $v = \sqrt{1,44 + 2,56} = \sqrt{4,00} = 2,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.
4. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 2 + 4 \times (-1) = 2$. Comme $\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0$, ils ne sont **pas** perpendiculaires.
5. $\|\vec{OG}\| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$; et $\vec{OG} \cdot \vec{i} = 6 \times 1 + 8 \times 0 = 6$: on retrouve bien $x = 6$.
(Géométriquement : $\cos \theta = 6/10 = 0,60$ et $10 \times 1 \times 0,60 = 6$.)
6. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2,0 \times 5,0 \times \cos 120^\circ = 2,0 \times 5,0 \times (-0,50) = -5,0$. Le signe **négalif** était prévisible : l'angle est **obtus** ($> 90^\circ$), donc $\cos \theta < 0$.