

# La fonction sinusoïdale du temps

Une foule de grandeurs physiques **oscillent** au cours du temps : la tension délivrée par le secteur, la pression de l'air quand une note pure retentit, la position d'une masse suspendue à un ressort, la tension aux bornes d'un composant en régime alternatif. Toutes montent et descendent en se répétant, avec la même allure lisse et régulière. Le modèle mathématique de cette évolution est **la fonction sinusoïdale**.

## 1. Le modèle d'une grandeur qui oscille

Observons avec une interface d'acquisition une grandeur  $u$  qui varie périodiquement — par exemple une tension. La courbe monte, redescend, repasse par zéro, et recommence à l'identique. Le motif le plus simple qui fasse cela est celui de la fonction sinus, étiré verticalement (pour atteindre la bonne valeur maximale) et horizontalement (pour se répéter au bon rythme).

### Grandeur sinusoïdale

Une grandeur  $u$  **varie de façon sinusoïdale** au cours du temps  $t$  lorsqu'elle s'écrit

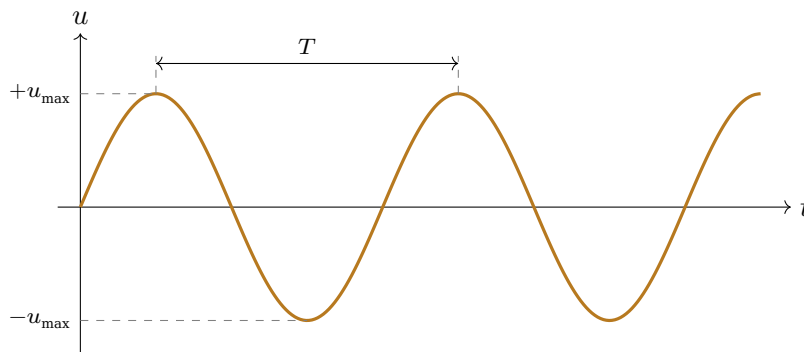
$$u(t) = u_{\max} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right),$$

où :

- $u_{\max}$  est l'**amplitude** : la valeur maximale atteinte par  $u$  (même unité que  $u$ ) ; la grandeur oscille entre  $+u_{\max}$  et  $-u_{\max}$  puisque  $\sin$  oscille entre  $+1$  et  $-1$  ;
- $T$  est la **période** : la plus petite durée au bout de laquelle le motif se reproduit identique à lui-même (en s) ;
- la **fréquence**  $f = \frac{1}{T}$  (en hertz, Hz) compte le nombre d'oscillations par seconde.

**D'où vient le facteur  $\frac{2\pi}{T}$  ?** La fonction sinus effectue un tour complet — un motif entier — quand son argument augmente de  $2\pi$  (fiche M1 :  $\sin$  est  $2\pi$ -périodique). On veut que  $u$  accomplisse ce tour pendant une durée  $T$ . Il faut donc que l'argument passe de 0 à  $2\pi$  lorsque  $t$  passe de 0 à  $T$  : le coefficient devant  $t$  est  $\frac{2\pi}{T}$ . Comme  $f = 1/T$ , on peut aussi l'écrire  $2\pi f$ , et

$$u(t) = u_{\max} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) = u_{\max} \sin(2\pi f t).$$



*Exemple.* Une tension alternative d'amplitude  $u_{\max} = 5,0 \text{ V}$  et de période  $T = 20 \text{ ms}$  a pour fréquence  $f = 1/T = 1/(20 \times 10^{-3}) = 50 \text{ Hz}$ . Elle s'écrit  $u(t) = 5,0 \sin\left(\frac{2\pi}{20 \times 10^{-3}} t\right)$  ( $t$  en s,  $u$  en V) — elle vaut 0 à  $t = 0$ , monte jusqu'à 5,0 V, redescend à -5,0 V, et recommence toutes les 20 ms.

## 2. Vérification de la période $T$

Le nom « période » n'a de sens que si la fonction reprend **réellement** la même valeur après une durée  $T$ . Vérifions-le par le calcul : comparons  $u(t + T)$  à  $u(t)$ .

### Socle français - exigible au concours

On remplace  $t$  par  $t + T$  dans l'expression, et on développe :

$$u(t + T) = u_{\max} \sin\left(\frac{2\pi}{T} (t + T)\right) = u_{\max} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \frac{2\pi}{T} T\right) = u_{\max} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + 2\pi\right).$$

Or ajouter  $2\pi$  à l'argument d'un sinus ne change pas sa valeur ( $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ , fiche M1). Donc

$$u(t + T) = u_{\max} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) = u(t).$$

La grandeur reprend la même valeur toutes les durées  $T$  :  **$T$  est bien la période.**

Le même calcul montre qu'aucune durée plus courte ne convient : entre 0 et  $T$ , l'argument  $\frac{2\pi}{T}t$  ne balaie qu'un seul tour complet, et la fonction ne repasse par une valeur donnée *dans le même sens* qu'une seule fois.  $T$  est donc bien la **plus petite** durée de répétition.

## 3. Le décalage par rapport à l'origine : la phase $\varphi$

L'expression du §1 suppose que  $u = 0$  (en montant) à l'instant  $t = 0$ . Mais l'instant  $t = 0$  n'a rien de spécial : c'est simplement **l'instant où l'on déclenche le chronomètre**. Si on le déclenche un peu plus tôt ou un peu plus tard, la grandeur oscille exactement de la même façon, mais sa valeur de départ  $u(0)$  change. Pour décrire une sinusoïde qui ne part pas forcément de zéro, on ajoute un terme constant dans l'argument du sinus.

### Phase à l'origine

La forme générale d'une grandeur sinusoïdale est

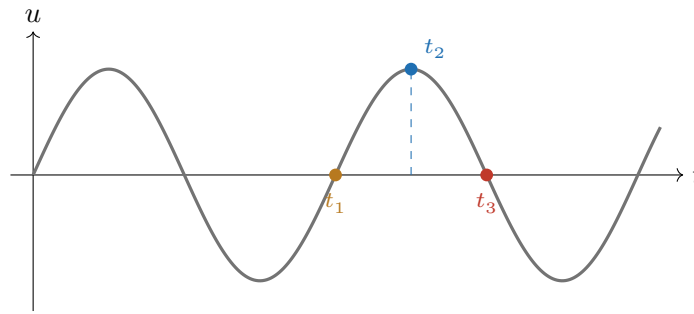
$$u(t) = u_{\max} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi\right),$$

où  $\varphi$  (lettre grecque « phi ») est la **phase à l'origine**, en radians. Elle fixe l'état de l'oscillation au moment où l'on déclenche le chronomètre : à  $t = 0$ ,

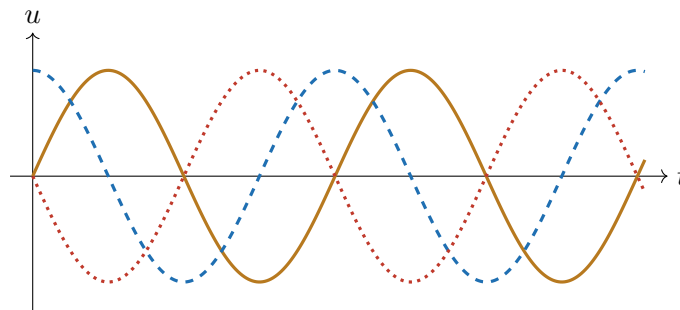
$$u(0) = u_{\max} \sin \varphi.$$

Amplitude  $u_{\max}$ , période  $T$  (donc fréquence  $f = 1/T$ ) et phase  $\varphi$  **suffisent** à décrire complètement la sinusoïde.

Changer  $\varphi$  ne déforme pas la courbe : cela la **décale horizontalement**. Prenons **une seule** oscillation physique, et déclenchons trois chronomètres à trois instants différents  $t_1, t_2, t_3$  :



Chaque chronomètre prend son instant de déclenchement comme **nouvelle origine des temps**. La même oscillation devient alors trois sinusoïdes de phases différentes, tracées dans un même repère — **mêmes couleurs et même code de trait que les instants ci-dessus** :



- chrono 1 :  $\varphi = 0$
- - - chrono 2 :  $\varphi = \pi/2$
- ... chrono 3 :  $\varphi = \pi$

- **chrono 1** ( $t_1, \varphi = 0$ ) : déclenché quand  $u = 0$  **en montant** — à sa propre origine,  $u = 0$  et **monte** (courbe de référence) ;
- **chrono 2** ( $t_2, \varphi = \pi/2$ ) : déclenché au **maximum** — sa courbe **part du sommet** (c'est la courbe « en cosinus ») ;
- **chrono 3** ( $t_3, \varphi = \pi$ ) : déclenché quand  $u = 0$  **en descendant** — à sa propre origine,  $u = 0$  et **descend**.

Une phase **positive** décale la courbe vers la **gauche** (l'oscillation est « en avance » : elle a déjà commencé son motif avant  $t = 0$ ).

#### Socle français - exigible au concours

##### Lire les paramètres de la sinusoïde sur un graphe $u(t)$ :

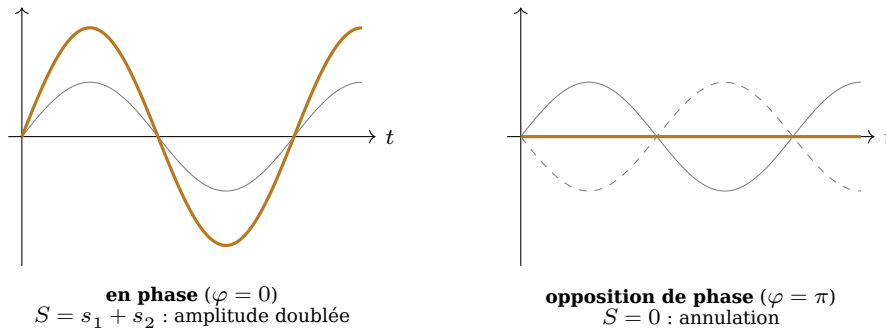
1. l'**amplitude**  $u_{\max}$  se lit sur l'axe vertical (la valeur du sommet) ;
2. la **période**  $T$  se lit sur l'axe horizontal, entre deux points identiques consécutifs (deux maxima, ou deux passages par zéro **dans le même sens**) ; puis  $f = 1/T$  ;

3. la **phase**  $\varphi$  se déduit de la valeur de départ :  $u(0) = u_{\max} \sin \varphi$ , en tenant compte du **sens** de variation à  $t = 0$  (croissante  $\Rightarrow (\sin \varphi)' = \cos \varphi > 0$  ; décroissante  $\Rightarrow (\sin \varphi)' = \cos \varphi < 0$ ). Lire la phase à l'origine sur un enregistrement n'est pas attendu au concours ; lire le **décalage** entre deux signaux l'est (chapitre 2, §5).

*Exemple.* Sur un enregistrement, à  $t = 0$  la grandeur vaut la moitié de son maximum,  $u(0) = u_{\max}/2$ , et elle est **croissante**. Alors  $\sin \varphi = 1/2$  avec  $\cos \varphi > 0$ , d'où  $\varphi = \pi/6$  (et non  $5\pi/6$ , qui correspondrait à une grandeur décroissante).

## 4. Additionner deux sinusoïdes de même période

Quand deux grandeurs sinusoïdales de **même période** se superposent en un même point, elles s'ajoutent instant par instant :  $S(t) = s_1(t) + s_2(t)$ . Le résultat est encore une sinusoïde de même période, mais son amplitude dépend **entièrement du décalage de phase**  $\varphi$  entre les deux.



Deux cas extrêmes sont à retenir (mêmes amplitudes) :

- **en phase** ( $\varphi = 0$ ) : les deux courbes montent et descendent ensemble, elles se **renforcent** — l'amplitude de la somme est **doublée** ;
- **en opposition de phase** ( $\varphi = \pi$ ) : quand l'une monte, l'autre descend d'autant, elles se **compensent** à chaque instant — la somme est **nulle**.

Pour un décalage intermédiaire, l'amplitude de la somme se situe entre ces deux extrêmes (0 et  $2 \times$  l'amplitude). (*Le calcul exact de cette amplitude relève des formules d'addition de la trigonométrie et n'est pas exigible.*)

*Exemple.* C'est le principe du **casque antibruit** : un micro capte le bruit ambiant, et le casque émet un « anti-son » de même amplitude en opposition de phase. Les deux ondes s'ajoutent en opposition et s'annulent — l'oreille reçoit le silence.

### Pièges fréquents

- **Confondre amplitude et valeur à un instant donné.**  $u_{\max}$  est le sommet de la courbe ;  $u(t)$  prend toutes les valeurs entre  $-u_{\max}$  et  $+u_{\max}$ .
- **Oublier le facteur  $2\pi$ .** L'argument du sinus est  $\frac{2\pi}{T}t$  (ou  $2\pi f t$ ), pas  $\frac{t}{T}$  : sans le  $2\pi$ , la fonction ne boucle pas en une période.
- **Travailler en degrés.** L'argument du sinus (donc la phase  $\varphi$ ) est en **radians** ; en fin de motif, l'argument vaut  $2\pi$ , pas 360.
- **Lire  $T$  entre deux zéros voisins.** Deux passages par zéro consécutifs sont séparés d'une **demi-période** : pour lire  $T$ , prendre deux points identiques *dans le même sens* de variation.
- **Croire qu'une phase déforme la courbe.**  $\varphi$  ne fait que **décaler** la sinusoïde le long de l'axe des temps ; amplitude et période sont inchangées.

## 5. Auto-test

Répondez avant de regarder les corrigés.

1. Une tension sinusoïdale a pour amplitude  $u_{\max} = 3,0 \text{ V}$  et pour période  $T = 4,0 \text{ ms}$ . Donner sa fréquence, puis écrire  $u(t)$  (sans déphasage).
2. En calculant  $u(t + T)$ , montrer que  $u$  reprend la même valeur toutes les durées  $T$ . On rappelle que  $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ .

- À  $t = 0$ , une grandeur sinusoïdale passe par 0 **en descendant**. Parmi  $\varphi = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ , laquelle est sa phase à l'origine ?
- Deux sons sinusoïdaux de même fréquence et de même amplitude se superposent en opposition de phase. Que vaut l'amplitude du son résultant ?
- Sur un graphe, une grandeur atteint  $+2,0$  et  $-2,0$ ; deux maxima successifs sont lus à  $t = 1,0$  s et  $t = 5,0$  s. Donner  $u_{\max}$ ,  $T$  et  $f$ .

### Corrigés

- $f = 1/T = 1/(4,0 \times 10^{-3}) = 2,5 \times 10^2$  Hz (250 Hz). Expression :  
 $u(t) = 3,0 \sin\left(\frac{2\pi}{4,0 \times 10^{-3}} t\right)$  ( $t$  en s,  $u$  en V).

- On remplace  $t$  par  $t + T$  dans l'expression :

$$u(t + T) = u_{\max} \sin\left(\frac{2\pi}{T}(t + T)\right) = u_{\max} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + 2\pi\right) = u_{\max} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = u(t),$$

car  $\sin(x + 2\pi) = \sin x$  : la valeur se reproduit toutes les durées  $T$ .

- $u(0) = u_{\max} \sin \varphi = 0$  impose  $\varphi = 0$  ou  $\varphi = \pi$ ; la grandeur **descend** à  $t = 0$  ( $\cos \varphi < 0$ ), donc  $\varphi = \pi$ .
- Amplitudes égales en opposition de phase : les deux signaux se compensent à chaque instant, l'amplitude résultante est **nulle** (silence).
- $u_{\max} = 2,0$ ;  $T = 5,0 - 1,0 = 4,0$  s (entre deux maxima);  $f = 1/T = 0,25$  Hz.