

Trigonométrie et petits angles

Mesurer un angle et une longueur, puis en déduire une autre longueur — c'est le service que la trigonométrie rend sans cesse à la physique. Nous partirons des triangles pour comprendre les rapports trigonométriques et retrouver les valeurs usuelles sans calculatrice. Le radian et le cercle permettront ensuite de lire les projections, puis de comprendre quand l'approximation des petits angles simplifie un calcul.

1. Les triangles et leurs angles

Avant de choisir une formule, il faut reconnaître la géométrie du dessin. Dans tout triangle, la somme des trois angles vaut 180° . Dans un triangle rectangle, l'un des angles vaut 90° : les deux autres ont donc pour somme 90° . On dit qu'ils sont **complémentaires**.

1.1 Le triangle rectangle

L'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit. Si sa longueur est c et si les deux autres côtés ont pour longueurs a et b , le théorème de Pythagore donne $c^2 = a^2 + b^2$.

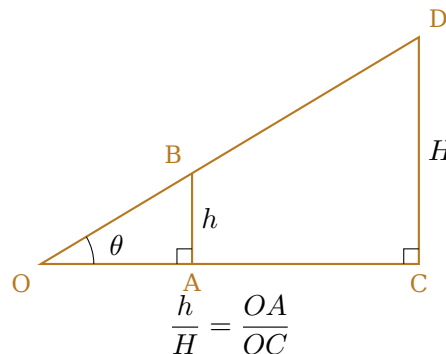
Exemple. Une hypoténuse de 13 cm et un côté de 5 cm donnent un troisième côté de $\sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$ cm. Le calcul porte sur les carrés : on ne soustrait pas directement $13 - 5$.

1.2 Les triangles semblables

Deux triangles qui ont les mêmes angles sont **semblables** : ils ont la même forme, mais pas nécessairement la même taille. Deux angles égaux suffisent, puisque le troisième est imposé par la somme 180° . Les côtés qui se correspondent sont ceux placés face aux mêmes angles.

Outil mathématique

Dans deux triangles semblables, les longueurs des côtés correspondants sont proportionnelles. Si le second est un agrandissement de facteur k , **toutes ses longueurs** sont multipliées par k ; les angles restent inchangés.



Exemple. Sur le dessin, $OA = 2$ m, $OC = 5$ m et $AB = 1,2$ m. Le grand triangle est $5/2$ fois plus grand : $CD = 1,2 \times 5/2 = 3$ m. Cette proportion intervient dans les ombres, les miroirs et les constructions optiques. Elle ne suppose pas que l'angle soit petit.

Vérification flash. Si toutes les longueurs d'un triangle sont doublées, que devient un de ses angles? *Il reste identique.*

Les rapports entre les côtés ne dépendent donc pas de la taille du triangle. Dans un triangle rectangle, ils ne dépendent que de l'angle choisi : c'est précisément ce que décrivent sinus, cosinus et tangente.

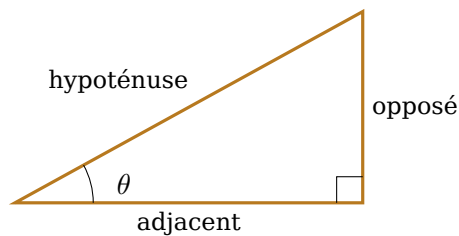
2. Sinus, cosinus et tangente

Sinus, cosinus et tangente

Dans un triangle rectangle, pour un angle aigu θ :

$$\sin \theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}, \quad \cos \theta = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}, \quad \tan \theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}.$$

L'**hypoténuse** est le côté le plus long, face à l'angle droit ; l'opposé et l'adjacent se repèrent **par rapport à θ** . On retient aussi $\tan \theta = \sin \theta / \cos \theta$.



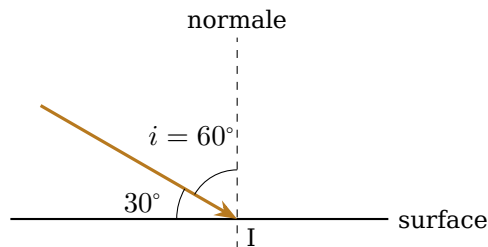
Exemple. Un triangle rectangle de côtés 3, 4 et 5 (l'hypoténuse) : pour l'angle θ opposé au côté 3, $\sin \theta = 3/5 = 0,60$, $\cos \theta = 4/5 = 0,80$, $\tan \theta = 3/4 = 0,75$.

2.1 Les angles complémentaires

Si $\beta = 90^\circ - \theta$, le côté opposé à θ devient le côté adjacent à β , et réciproquement. L'hypoténuse reste la même :

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta, \quad \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta.$$

Un angle avec une surface et un angle avec sa normale sont également complémentaires. En optique, on doit donc d'abord repérer **la normale**, puis seulement appliquer la loi de réfraction.



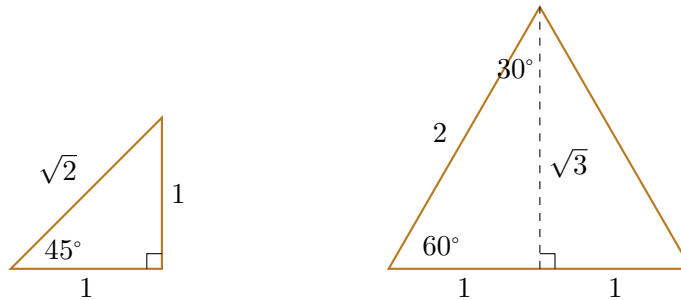
3. Les angles usuels sans calculatrice

Un calcul peut souvent rester exact : $\sqrt{3}/2$ apporte davantage d'information qu'un arrondi décimal. Les valeurs usuelles se retrouvent avec deux triangles simples.

3.1 Deux triangles de référence

Dans un triangle rectangle isocèle dont les côtés de l'angle droit valent 1, les angles aigus valent 45° et l'hypoténuse vaut $\sqrt{2}$. Ainsi $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$.

Coupons maintenant un triangle équilatéral de côté 2 par sa hauteur. On obtient deux triangles rectangles : l'hypoténuse vaut 2, la demi-base vaut 1 et la hauteur vaut $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. Les angles aigus sont 30° et 60° .



Outil mathématique

Angle	0°	30°	45°	60°	90°
Sinus	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
Cosinus	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
Tangente	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	non définie

Les valeurs à 0° et 90° se lisent aussi sur le cercle du §4. La tangente n'est pas définie à 90° , car le cosinus est nul.

3.2 Le choix entre valeur exacte et encadrement

Pour retrouver un angle aigu, chercher d'abord un rapport connu : $\sin \theta = 1/2$ donne $\theta = 30^\circ$; $\tan \theta = 1$ donne $\theta = 45^\circ$. Si le rapport n'est pas usuel, il n'est pas nécessaire d'inventer un arrondi. On peut conserver une expression exacte ou encadrer l'angle.

Exemple. Pour $\sin \theta = 3/5$, on a $1/2 < 3/5 < \sqrt{2}/2$ (la dernière comparaison se vérifie en comparant les carrés $9/25 < 1/2$). Le sinus augmente entre 0° et 90° : on en déduit $30^\circ < \theta < 45^\circ$.

La notation $\arcsin(3/5)$ désigne exactement l'angle de cette plage dont le sinus vaut $3/5$. De même, $\arccos$ et $\arctan$ permettent de nommer l'angle à partir d'un cosinus ou d'une tangente. Ce sont des fonctions réciproques : $\arcsin x$ ne signifie pas $1/\sin x$.

Application à la réfraction. Si la loi de Snell-Descartes conduit à $\sin i_2 = 1/3$, alors $0^\circ < i_2 < 30^\circ$, puisque $1/3 < 1/2$. Cet encadrement peut suffire pour départager des schémas. Pour un angle critique tel que $\sin i_c = 1/2$, on obtient directement $i_c = 30^\circ$.

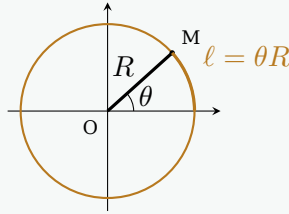
Vérification flash. Un rayon fait 60° avec une surface. Quel sinus faut-il employer pour son incidence ? *L'incidence est 30° ; son sinus vaut $1/2$.*

4. Le radian et le cercle trigonométrique

Le degré est une unité de commodité ; l'unité **naturelle** des angles — celle du Système international, et la seule qui rende vraie l'approximation du §6 — est le radian.

Radian

Sur un cercle de rayon R , un angle au centre θ intercepte un arc de longueur $\ell = \theta \cdot R$.



Un **radian** (rad) est l'angle qui intercepte un arc de longueur égale au rayon. Un demi-tour vaut $180^\circ = \pi$ rad, d'où la conversion :

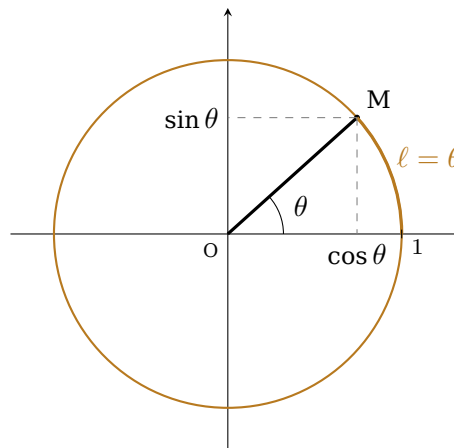
$$\theta_{\text{rad}} = \theta_{\text{deg}} \cdot \frac{\pi}{180}$$

Exemple. $30^\circ = 30\pi/180 = \pi/6$ rad ; en sens inverse, $\pi/4$ rad $= (\pi/4) \times 180/\pi = 45^\circ$. Conserver les multiples de π évite les arrondis inutiles.

La relation $\ell = \theta \cdot R$ dit au passage ce qu'est vraiment un angle en radians : $\theta = \ell/R$, le **rapport de deux longueurs**. Un angle est donc un **nombre sans unité** — le « rad » n'est pas une unité au sens des équations aux dimensions, seulement le rappel de la convention de mesure. C'est ce qui autorisera à écrire qu'un angle vaut 0,030 tout court (§6).

Exemple. Un arc de 3,0 cm sur un cercle de rayon 6,0 cm : $\theta = \ell/R = 3,0/6,0 = 0,50$ — les centimètres se sont simplifiés, il reste un nombre, que l'on étiquette « 0,50 rad ».

Sur le **cercle trigonométrique** (rayon 1 sans unité, centré à l'origine), un point M repéré par l'angle θ a pour coordonnées $(\cos \theta ; \sin \theta)$ — et l'arc ℓ parcouru depuis l'axe horizontal mesure exactement θ pour un angle positif :



Le cosinus est donc une abscisse et le sinus une ordonnée. À gauche de l'axe vertical, le cosinus est négatif ; sous l'axe horizontal, le sinus est négatif. Ces signes permettront de lire des composantes. Un angle orienté est compté positivement dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et négativement dans l'autre sens.

5. Les projections sur des axes

Le cercle du §4 donne les coordonnées d'un point à distance 1 de l'origine. Pour une flèche de longueur u , les mêmes triangles sont agrandis d'un facteur u . On obtient ainsi ses composantes

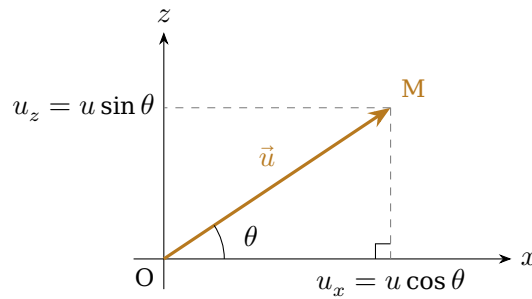
sur les axes. Le vocabulaire et les opérations sur les vecteurs sont détaillés dans @@M6@@ — [Les vecteurs](#); nous utilisons ici leur géométrie.

Outil mathématique

Dans un repère orthonormé $(O; x, z)$, si $\vec{u}$ a pour norme u et fait l'angle orienté θ avec l'axe positif Ox :

$$u_x = u \cos \theta, \quad u_z = u \sin \theta.$$

La norme u est positive ou nulle; une composante peut être négative. Le cosinus correspond à l'axe **depuis lequel l'angle est mesuré**.



5.1 Le choix de l'angle et des signes

Exemple. Une vitesse de norme $20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ fait 30° au-dessus de l'horizontale vers la droite :

$$v_x = 20 \cos 30^\circ = 10\sqrt{3} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}, \quad v_z = 20 \sin 30^\circ = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

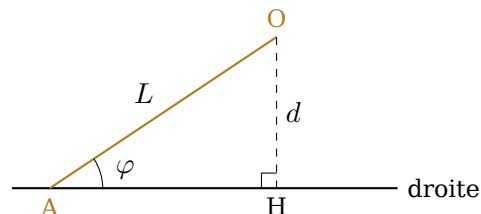
Il s'agit seulement de décrire une vitesse donnée, sans étudier ici son évolution. Si l'angle est fourni depuis la verticale, il vaut 60° : $v_x = 20 \sin 60^\circ$ et $v_z = 20 \cos 60^\circ$ donnent les mêmes résultats.

Une flèche dirigée vers la gauche et vers le haut a au contraire une composante horizontale négative et une composante verticale positive. Pour une norme 10 et un angle de 30° au-dessus de l'horizontale vers la gauche, on trouve $u_x = -5\sqrt{3}$ et $u_z = 5$.

Un contrôle simple consiste à vérifier $u_x^2 + u_z^2 = u^2$ et $|u_x| \leq u$, $|u_z| \leq u$. La relation $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ est ainsi une autre écriture de Pythagore.

5.2 La distance perpendiculaire à une droite

La même géométrie permet de calculer une distance à une droite. La distance cherchée est celle mesurée **perpendiculairement** à la droite, et non suivant une direction arbitraire.



Dans le triangle rectangle AHO, $\sin \varphi = OH/OA$, donc $d = L \sin \varphi$. Pour $L = 40 \text{ cm}$ et $\varphi = 30^\circ$, $d = 20 \text{ cm}$. Cette distance jouera le rôle de bras de levier dans le chapitre sur les moments; le calcul du moment lui-même appartient à ce chapitre.

Vérification flash. Un vecteur de norme 8 est dirigé selon l'axe vertical positif. Quelles sont ses composantes ? $u_x = 0$ et $u_z = 8$.

6. L'approximation des petits angles

Lorsque $|\theta| \ll 1$ en radians, l'arc et les longueurs données par le sinus et la tangente deviennent très proches. On peut alors simplifier les calculs :

Approximation des petits angles

Pour un petit angle **exprimé en radians** :

$$\sin \theta \simeq \tan \theta \simeq \theta \quad \text{et} \quad \cos \theta \simeq 1.$$

Le tableau suivant donne des valeurs déjà calculées. Comparez-les à l'angle indiqué : aucun calcul de sinus ou de tangente n'est nécessaire.

θ (rad)	0,5	0,2	0,1	0,05	0,01
$\sin \theta$	0,479	0,199	0,0998	0,0500	0,0100
$\tan \theta$	0,546	0,203	0,1003	0,0500	0,0100

À 0,5 rad, l'écart est visible ; à 0,1 rad, remplacer le sinus ou la tangente par l'angle entraîne un écart relatif inférieur à 0,4 %. Pour $|\theta| \leq 0,1$ rad, les trois approximations ci-dessus ont chacune une erreur relative inférieure à 0,6 % (hors valeurs nulles, où l'égalité est exacte). Ce repère convient donc pour un calcul à 1 % près. La précision demandée reste le critère de choix : il n'existe pas de frontière universelle entre angle petit et angle trop grand.

Exemple. On observe le sommet d'une tour de 300 m depuis un point au niveau de son pied, à 10 km de distance horizontale. Le triangle donne $\tan \theta = 300/10\,000 = 0,030$. L'angle est petit : $\theta \simeq 0,030$ rad. On peut garder le résultat en radians, sans rechercher une valeur décimale en degrés.

La similitude du §1 était exacte pour tous les angles de la construction. Ici, remplacer la tangente par l'angle est une approximation : le symbole $\simeq$ doit rester visible.

L'essentiel

Outil mathématique

Notion	À retenir
Triangle rectangle	$a^2 + b^2 = c^2$; les deux angles aigus sont complémentaires.
Triangles semblables	Mêmes angles, côtés correspondants proportionnels ; aucune approximation de petit angle nécessaire.
Rapports trigonométriques	Sinus : opposé/hypoténuse ; cosinus : adjacent/hypoténuse ; tangente : opposé/adjacent.
Angles usuels	Retrouver 30° , 45° et 60° avec les deux triangles de référence (§3).
Degrés et radians	$180^\circ = \pi$ rad ; $\theta_{\text{rad}} = \theta_{\text{deg}} \pi / 180$.
Projections	Angle depuis Ox : $u_x = u \cos \theta$, $u_z = u \sin \theta$; contrôler les signes.
Petits angles	En radians et pour $ \theta \ll 1$: $\sin \theta \simeq \tan \theta \simeq \theta$ et $\cos \theta \simeq 1$.

Pièges fréquents

- **L'angle de référence.** Opposé et adjacent se définissent par rapport à l'angle choisi. Un angle avec la surface n'est pas l'angle avec la normale.
- **Les unités d'angle.** $\sin \theta \simeq \theta$ ne s'applique **qu'en radians** : $\sin 5^\circ \neq 5$.
- **Les rapports de similitude.** Mettre les côtés correspondants dans le même ordre ; ne pas inverser un seul des rapports.
- **Les signes des projections.** Une norme est positive ou nulle, une composante peut être négative.
- **Les fonctions réciproques.** $\arcsin$ n'est pas $1/\sin$.
- **La précision.** $\cos \theta \simeq 1$, jamais $\cos \theta \simeq \theta$; ne pas appliquer l'approximation à un angle simplement parce qu'il est aigu.

Méthode — Un calcul trigonométrique sans calculatrice

1. Repérer le triangle rectangle, l'angle donné et les côtés utiles.
2. Choisir un rapport, puis isoler la grandeur cherchée avant de remplacer les valeurs.
3. Utiliser une valeur usuelle exacte ; sinon conserver l'expression ou encadrer l'angle. N'employer les petits angles qu'après conversion en radians.
4. Contrôler unités, signes et ordre de grandeur.

Application. Depuis un point au niveau du pied d'un objet vertical, à distance horizontale 12 m, on voit son sommet sous un angle de 30° . Dans le triangle rectangle, $\tan 30^\circ = h/12$, donc $h = 12\sqrt{3}/3 = 4\sqrt{3}$ m. Comme $1 < \sqrt{3} < 2$, on vérifie $4 < h < 8$ m. Aucune approximation de petit angle n'est nécessaire.

7. Auto-test

Répondez sans calculatrice avant de lire les corrigés. Les valeurs exactes sont acceptées ; aucun angle décimal non usuel n'est à deviner.

1. Un triangle rectangle a une hypoténuse de 13 cm et un côté de 5 cm. Donner les trois rapports trigonométriques pour l'angle θ opposé au côté de 5 cm. Est-il inférieur ou supérieur à 30° ?
2. Deux triangles sont semblables. Un côté de 4 cm correspond à un côté de 10 cm. À quelle longueur correspond un autre côté de 6 cm du petit triangle ?
3. Un rayon fait 30° avec une surface. Donner son incidence par rapport à la normale et le sinus de cette incidence.
4. Convertir 45° et 2° en radians, puis $\pi/6$ rad en degrés.
5. Une vitesse de norme $12 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ est dirigée à 60° au-dessus de l'horizontale vers la droite. Donner ses composantes.
6. Dans le schéma du §5.2, $OA = 30$ cm et $\varphi = 30^\circ$. Quelle est la distance de O à la droite ?
7. À $\theta = 0,10$ rad, on donne $\sin \theta = 0,0998$ et $\tan \theta = 0,1003$. Remplacer les deux par 0,10 convient-il pour un calcul à 1 % près ?
8. Depuis un point situé au niveau du pied d'un bâtiment, on observe son sommet à 1,0 km de distance horizontale. Sa hauteur est 30 m. Donner l'angle apparent approché en radians, puis son expression en degrés.

Corrigés

1. Le troisième côté vaut $\sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ cm. $\sin \theta = 5/13$, $\cos \theta = 12/13$ et $\tan \theta = 5/12$. Puisque $5/13 < 1/2$, $\theta < 30^\circ$.
2. Le facteur d'agrandissement est $10/4 = 5/2$; la longueur cherchée vaut $6 \times 5/2 = 15$ cm.

3. $i = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ et $\sin i = \sqrt{3}/2$.
4. $45^\circ = \pi/4 \text{ rad}$; $2^\circ = \pi/90 \text{ rad}$; $\pi/6 \text{ rad} = 30^\circ$.
5. $v_x = 12 \cos 60^\circ = 6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$; $v_z = 12 \sin 60^\circ = 6\sqrt{3} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Les composantes sont positives, et $6^2 + (6\sqrt{3})^2 = 144 = 12^2$.
6. $d = OA \sin \varphi = 30/2 = 15 \text{ cm}$.
7. Oui : les écarts sont 0,0002 et 0,0003, soit environ 0,2 % et 0,3 % des valeurs données.
8. $\tan \theta = 30/1000 = 0,030$. L'angle est petit : $\theta \simeq 0,030 \text{ rad}$, soit $(5,4/\pi)^\circ$. On peut conserver cette expression, sans calculer de décimale.