

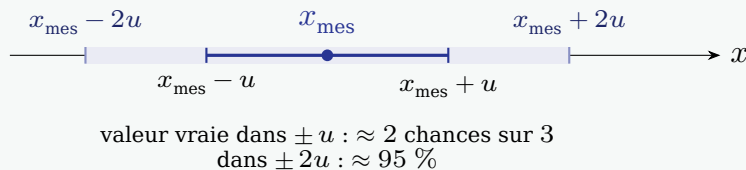
Aucun instrument n'est parfait : mesurer, c'est toujours obtenir une valeur « à quelque chose près ». L'**incertitude** chiffre ce « quelque chose » : elle dit quelle confiance accorder au résultat. Cette fiche donne les gestes pratiques : évaluer une incertitude, écrire correctement un résultat, et décider si une mesure est compatible avec une valeur de référence. L'écriture des chiffres significatifs est traitée dans la fiche **O3**.

1. L'incertitude-type $u(x)$

Incertitude-type

L'**incertitude-type** $u(x)$ d'une mesure x_{mes} estime la **dispersion** des valeurs que l'on obtiendrait en répétant la mesure. La valeur vraie de la grandeur se trouve **vraisemblablement** à moins de $u(x)$ de x_{mes} ; on écrit le résultat sous la forme

$$x = x_{\text{mes}} \pm u(x) \quad (\text{unité}).$$



Exemple. Une pipette jaugée délivre $V_{\text{mes}} = 20,00$ mL avec $u(V) = 0,025$ mL : on écrit $V = 20,00 \pm 0,03$ mL.

Plus précisément : l'intervalle $x_{\text{mes}} \pm u(x)$ a environ **deux chances sur trois** de contenir la valeur vraie ; l'intervalle **élargi** $x_{\text{mes}} \pm 2u(x)$, environ 95 %. C'est ce facteur 2 que l'on retrouvera dans le critère de validation d'une mesure (§4).

Écriture du résultat. L'incertitude est une *estimation* : on l'arrondit à 1 chiffre significatif, **par excès**, et on arrondit la valeur mesurée **au même rang**.

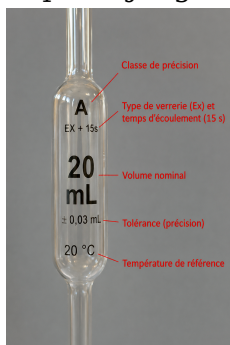
Exemple. Un pH-mètre courant mesure à $u(\text{pH}) = 0,1$ près : c'est pourquoi un pH s'écrit toujours avec **une seule décimale** ($\text{pH} = 2,5$).

2. Évaluer $u(x)$ en pratique : quatre situations

2.1 La notice du fabricant

Le plus souvent, l'incertitude est **donnée par le constructeur**, gravée sur la verrerie ou indiquée dans la notice de l'appareil.

Pipette jaugée



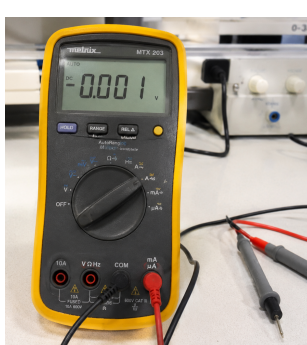
$$u(V) = 0,03 \text{ mL}$$

Éprouvette graduée



$$u(V) = 0,25 \text{ mL}$$

Multimètre



voir texte

Balance



$$u(m) = \pm 0,01 \text{ g}$$

Tolérance de la verrerie et incertitude de lecture des appareils numériques.

Exemple. Sur une pipette jaugée de 20 mL de classe A, on lit « $\pm 0,03 \text{ mL}$ » : on prend $u(V) = 0,03 \text{ mL}$.

Exemple — exploiter la notice d'un multimètre. Pour mesurer un courant alternatif, la notice fournit le tableau suivant.

Calibre	Résolution	Précision
20 μA	0,01 μA	$\pm (1 \% \text{ valeur lue} + 3 \text{ digits})$
2 mA	1 μA	$\pm (1 \% \text{ valeur lue} + 3 \text{ digits})$
200 mA	100 μA	$\pm (1,8 \% \text{ valeur lue} + 3 \text{ digits})$
10 A	10 mA	$\pm (3 \% \text{ valeur lue} + 7 \text{ digits})$

Sur le calibre 200 mA, le multimètre affiche $I = 50,6 \text{ mA}$. La **résolution** 100 $\mu\text{A} = 0,1 \text{ mA}$ indique le **dernier chiffre affiché** sur l'écran, ici le dixième de mA. Un « digit » est une unité de ce dernier chiffre ; ainsi, 3 digits valent $3 \times 0,1 = 0,3 \text{ mA}$.

L'incertitude-type sur I est alors :

$$u(I) = 0,018 \times 50,0 + 0,3 = 1,2 \text{ mA}.$$

On arrondit l'incertitude à **un chiffre significatif par excès** : $u(I) = 2 \text{ mA}$. La valeur mesurée s'arrondit alors au même rang (le mA) :

$$I = 51 \pm 2 \text{ mA}.$$

2.2 La lecture d'une graduation

Quand on lit une position entre deux graduations (règle, éprouvette, burette) sans autre indication, on prend pour incertitude-type **une graduation** — choix prudent qui couvre à la fois le positionnement de l'œil et l'épaisseur du trait.

Exemple. Burette graduée au dixième de mL, lecture $V = 13,2 \text{ mL}$: $u(V) = 0,1 \text{ mL}$.

Cas fréquent : la lecture graphique. Lire les coordonnées d'un point sur un graphe imprimé, c'est faire une lecture de graduation **sur l'axe** : même en supposant le point parfaitement placé, l'incertitude de lecture correspond à ce que représente environ **1 mm sur l'axe**. Elle dépend donc de l'**échelle** du graphe — le même graphe imprimé deux fois plus grand donne une lecture deux fois plus précise.

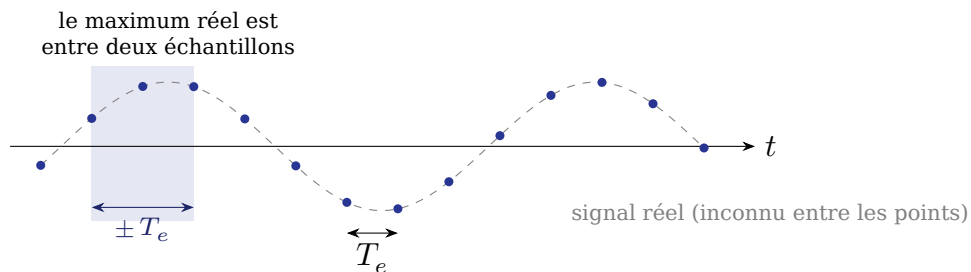
Exemple. Sur un graphe où 1 cm d'axe représente 2 mL, 1 mm correspond à 0,2 mL : une abscisse lue sur ce graphe porte $u(V) = 0,2 \text{ mL}$.

Cap études supérieures

Barres d'erreur. Certains graphes portent sur chaque point des **barres d'erreur** (« moustaches », voire des rectangles) : leur demi-longueur donne directement l'incertitude-type de la coordonnée correspondante, sans règle du « 1 mm ». C'est rare en terminale.

2.3 L'échantillonnage d'une acquisition numérique

Une acquisition numérique (microcontrôleur, oscilloscope, pointage vidéo) ne fournit pas une courbe continue, mais un **nuage de points** : une mesure toutes les T_e (la **période d'échantillonnage**). L'axe des temps est donc « gradué » par l'échantillonnage : un événement du signal (maximum, passage par zéro...) se produit **quelque part entre deux points**, sans que l'on puisse savoir où.



Sur le nuage, on pointe l'échantillon le plus proche de l'événement (le point le plus haut, pour un maximum) : le véritable événement peut se trouver n'importe où entre le point **précédent** et le point **suivant**, soit à moins de T_e du point retenu. On prend donc $u(t) = T_e$ (choix prudent) pour chaque instant pointé. Une **durée** s'obtient par différence de deux pointages : en l'absence de formule de composition fournie, on garde là aussi $u = T_e$ sur chacun des deux instants.

Exemple. Un capteur enregistre une tension toutes les $T_e = 2 \text{ ms}$; le maximum du signal est atteint au point d'abscisse $t = 124 \text{ ms}$. On retient $t = 124 \pm 2 \text{ ms}$.

2.4 Une série de mesures répétées

Quand la mesure est **répétable**, on la répète n fois dans les mêmes conditions ; les valeurs se dispersent.

Cap bac — l'indispensable

Pour une série de n mesures indépendantes :

- la meilleure estimation de la grandeur est la **moyenne** $\bar{x}$ des valeurs ;
- l'**écart-type** σ de la série — fourni directement par le tableur, la calculatrice ou Python (protocoles ci-dessous) — donne l'incertitude-type d'**une** mesure de la série. En l'absence d'indication dans l'énoncé, on prend $u(x) = \sigma$ (choix prudent).

Exemple. Cinq mesures d'un même volume donnent 12,9 ; 13,1 ; 13,0 ; 13,2 ; 13,0 mL. La calculatrice donne $\bar{V} = 13,04$ mL et un écart-type de 0,11 mL. On écrit : $V = 13,0 \pm 0,2$ mL (incertitude arrondie par excès).

Cap études supérieures

La moyenne est plus précise qu'une mesure isolée. En moyennant N mesures indépendantes, les fluctuations se compensent en partie : l'incertitude-type de la **moyenne** vaut

$$u(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}},$$

soit $\sqrt{N}$ fois moins que celle d'une mesure — c'est tout l'intérêt de répéter les mesures. Quand un sujet attend cette formule, il la fournit ; sinon, $u(x) = \sigma$ reste un choix prudent, qui majore l'incertitude.

Calculer une moyenne et un écart-type**Cap études supérieures**

La formule de l'écart-type (jamais exigée au bac — les outils ci-dessous s'en chargent) : pour N mesures $x_1, x_2, \dots, x_N$ de moyenne $\bar{x}$,

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2}{N - 1}}.$$

On divise par $N - 1$ et non par N : cela corrige le fait que $\bar{x}$ est elle-même estimée à partir des mesures.

Au tableur (Excel, LibreOffice Calc). Les mesures étant en A1:A5 : =MOYENNE(A1:A5) et =ECARTYPE.STANDARD(A1:A5) (qui divise bien par $N - 1$).

À la calculatrice (TI).

- (facultatif, pour effacer les listes existantes) : stats $\rightarrow$ 4:EffListe ;
- stats $\rightarrow$ EDIT $\rightarrow$ 1:Modifier : entrer les valeurs dans L1 ;
- stats $\rightarrow$ CALC $\rightarrow$ 1:Stats 1-Var : la moyenne se lit sur la ligne $\bar{x}$ et l'écart-type sur la ligne s_x (la valeur σ_x , qui divise par N , en diffère peu dès que N dépasse quelques unités).

[illegible]

Saisie de la série dans L1.

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
QUARTILE MÉTHODE [TI-83CE]

Stats 1 var

$\bar{x}=13.04$
 $\Sigma x=65.2$
 $\Sigma x^2=850.26$
 $Sx=0.1140175425$
 $\sigma x=0.1019803903$
 $n=5$
 $\min X=12.9$
 $\downarrow Q_1 [TI-83CE]=13$

Stats 1-Var : moyenne $\bar{x}$, écart-type S_x .

En Python. La bibliothèque standard suffit :

```
from statistics import mean, stdev
mesures = [12.9, 13.1, 13.0, 13.2, 13.0]
print(mean(mesures))      # moyenne : 13.04
print(stdev(mesures))     # écart-type : 0.114
```

(équivalent avec numpy : `np.std(mesures, ddof=1)` — l’option `ddof=1` assure la division par $N - 1$).

3. Incertitude d'une grandeur calculée

Souvent, la grandeur cherchée est **calculée** à partir de plusieurs mesures (par exemple $c = n/V$) : les incertitudes de chaque mesure se **composent**. Au bac, la formule de composition est **toujours fournie** ; il suffit d'y remplacer les valeurs. Les deux formes les plus courantes :

- pour une **somme** $X = x + y$:

$$u(X) = \sqrt{u(x)^2 + u(y)^2}$$

- pour un **produit** ou un **quotient** $X = \frac{x \cdot y}{z}$:

$$\frac{u(X)}{|X|} = \sqrt{\left(\frac{u(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{u(y)}{y}\right)^2 + \left(\frac{u(z)}{z}\right)^2}$$

Exemple. $c = \frac{n}{V}$ avec $n = (2,0 \pm 0,1) \times 10^{-3}$ mol, $V = 50,00 \pm 0,05$ mL, La formule fournie donne :

$$\frac{u(c)}{c} = \sqrt{\left(\frac{0,1}{2,0}\right)^2 + \left(\frac{0,05}{50,00}\right)^2} = 0,050,$$

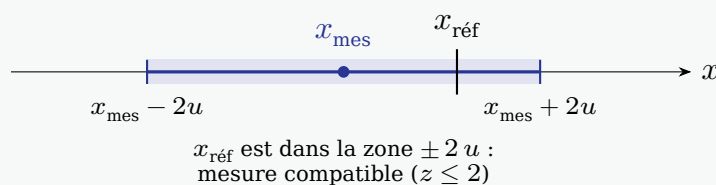
soit, avec $c = 4,0 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$: $u(c) = 0,050 \times 4,0 \times 10^{-2} = 2,0 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$,
et $c = (4,0 \pm 0,2) \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

On remarque que l'incertitude relative sur V (0,1 %) est **écrasée** par celle sur n (5 %) : c'est la mesure la moins précise qui domine.

4. Comparer le résultat à une valeur de référence

Une mesure n'est jamais « exactement » égale à la valeur attendue. Pour décider si l'écart est acceptable, on le compare à l'incertitude :

Écart normalisé



Pour comparer une mesure $x_{\text{mes}} \pm u(x)$ à une valeur de référence x_{ref} , on calcule le *z-score* :

$$z = \frac{|x_{\text{mes}} - x_{\text{ref}}|}{u(x)}.$$

Si $z \leq k$, où k est un entier en général pris égal à **2**, la mesure est **compatible** avec la référence ; si $z > k$, elle ne l'est pas : il faut chercher une source d'erreur (protocole, étalonnage, calcul...).

Le choix $k = 2$ n'est pas arbitraire : la valeur vraie a environ 95 % de chances de se trouver à moins de $2u(x)$ de x_{mes} (§1). Une référence située au-delà est donc très probablement le signe d'un problème, pas du hasard.

Exemple. On a mesuré l'intensité de pesanteur $g = 9,7 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$ avec $u(g) = 0,1 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$; la valeur de référence est $9,81 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$:

$$z = \frac{|9,7 - 9,81|}{0,1} = 1,1 \leq 2 :$$

la mesure est compatible avec la référence.

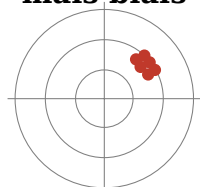
Cap études supérieures

Et pour publier une découverte ? Si $z \leq 2$ suffit à valider une mesure de TP, le seuil symétrique ($z > 2$: « écart significatif ») serait bien trop laxiste pour annoncer une découverte scientifique : par simple hasard, environ une expérience sur vingt franchit ce seuil — et des milliers d'analyses sont menées chaque année dans le monde. La physique des particules exige ainsi $z \geq 5$ (« cinq sigma », une probabilité de coïncidence de l'ordre de une sur trois millions) : c'est à ce seuil que la découverte du boson de Higgs a été annoncée, en 2012.

5. Biais expérimental : des mesures regroupées peuvent être fausses

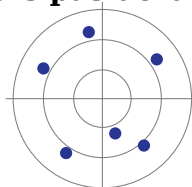
L'incertitude décrit la **dispersion** normale des mesures. Elle ne détecte pas nécessairement un **biais**, c'est-à-dire un décalage systématique entre les mesures et la valeur vraie.

**Faible dispersion
mais biais**



mesures regroupées,
moyenne décalée

**Forte dispersion
mais pas de biais**



mesures dispersées,
moyenne centrée

Un biais peut provenir d'un **zéro incorrect**, d'un mauvais étalonnage, d'un montage mal réglé, d'un protocole inadapté ou d'une lecture systématiquement décalée par l'opérateur. Répéter puis moyenner les mesures améliore la répétabilité, mais **ne supprime pas le biais** : il faut en trouver la cause et corriger le dispositif ou le protocole.

Pièges fréquents

- L'incertitude s'écrit avec 1 chiffre significatif, et la valeur mesurée s'arrête **au même rang** : pas de $9,714\,28 \pm 0,1$.
- Ne pas oublier l'**unité**, commune à x_{mes} et $u(x)$.
- « Les deux valeurs sont proches » ne suffit pas sur une copie : **calculer** z et conclure par rapport à k (sans autre indication, on prend $k = 2$).
- L'incertitude ne couvre que la **variabilité normale** de la mesure : elle n'excuse jamais une erreur de protocole (mauvais étalonnage, oubli d'un facteur de dilution...), qui doit être **corrigée**, pas « incluse dans u ».

Cap bac — l'indispensable

- Résultat : $x = x_{\text{mes}} \pm u(x)$ (unité), incertitude à 1-2 CS.
- Quatre sources pour $u(x)$: **notice** du fabricant, **une graduation** en lecture (sur un graphe : ce que représente 1 mm sur l'axe), **une période d'échantillonnage** en acquisition numérique, **écart-type** d'une série de mesures.
- Grandeur calculée : formule de composition **fournie**, il suffit de remplacer.
- Validation : $z = |x_{\text{mes}} - x_{\text{réf}}| / u(x) \leq 2$.

6. Auto-test

Répondez avant de regarder les corrigés.

1. La balance du tableau affiche $m = 12,348$ g. Écrire le résultat de mesure en utilisant l'incertitude indiquée sous sa photographie.
2. En courant alternatif, le multimètre affiche $I = 1,500$ mA sur le calibre 2 mA. À l'aide du tableau de la notice, calculer $u(I)$ puis écrire le résultat de mesure.
3. Huit mesures d'une température donnent une moyenne de $21,37$ °C et un écart-type de $0,24$ °C. Écrire le résultat.
4. Le microphone d'un téléphone enregistre la pression acoustique d'une onde sonore à la fréquence d'échantillonnage $f_e = 44,1$ kHz. Un maximum de pression est repéré à $t = 12,340$ ms. Calculer la période d'échantillonnage T_e , en déduire $u(t)$ puis écrire le résultat de mesure.
5. Un mobile parcourt une distance $d = 2,00$ m en $\Delta t = 0,80$ s. Les incertitudes-types sont $u(d) = 0,01$ m et $u(\Delta t) = 0,02$ s. Calculer sa vitesse $v = d/\Delta t$, puis son incertitude à l'aide de la formule fournie :

$$\frac{u(v)}{v} = \sqrt{\left(\frac{u(d)}{d}\right)^2 + \left(\frac{u(\Delta t)}{\Delta t}\right)^2}.$$

Écrire le résultat de mesure.

6. Une concentration mesurée vaut $c = 0,104$ mol · L⁻¹ avec $u(c) = 0,003$ mol · L⁻¹; l'étiquette indique $0,100$ mol · L⁻¹. La mesure est-elle compatible ?
7. Même question avec $u(c) = 0,001$ mol · L⁻¹.

Corrigés

1. $m = 12,35 \pm 0,01$ g (la valeur s'arrête au rang de u).
2. La résolution vaut $1 \mu\text{A} = 0,001$ mA, donc 3 digits valent $0,003$ mA. Ainsi, $u(I) = 0,01 \times 1,500 + 0,003 = 0,018$ mA, soit $u(I) = 0,02$ mA après arrondissement par excès. On écrit $I = 1,50 \pm 0,02$ mA.
3. $T = 21,4 \pm 0,3$ °C (écart-type arrondi par excès, valeur au même rang).
4. $T_e = 1/f_e = 1/(44,1 \times 10^3) = 2,27 \times 10^{-5}$ s = $0,0227$ ms. On prend $u(t) = T_e$, soit $0,03$ ms après arrondissement à un chiffre significatif par excès. La valeur s'arrête au même rang : $t = 12,34 \pm 0,03$ ms.
5. $v = 2,00/0,80 = 2,5$ m · s⁻¹, puis

$$\frac{u(v)}{v} = \sqrt{\left(\frac{0,01}{2,00}\right)^2 + \left(\frac{0,02}{0,80}\right)^2} = 0,0255.$$

Ainsi, $u(v) = 2,5 \times 0,0255 = 0,0637$ m · s⁻¹, soit $0,07$ m · s⁻¹ après arrondissement par excès. On écrit $v = 2,50 \pm 0,07$ m · s⁻¹.

6. $z = |0,104 - 0,100| / 0,003 = 1,3 \leq 2$: compatible.
7. $z = |0,104 - 0,100| / 0,001 = 4 > 2$: incompatible.