

Unités, conversions et homogénéité

Une valeur physique n'est complète qu'avec son **unité** : écrire seulement « $v = 20$ » ne permet pas de savoir s'il s'agit de $20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ou de $20 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Les unités servent aussi de contrôle : une relation dont les deux membres n'ont pas la même unité ne peut pas être correcte. On dit qu'une équation doit être **homogène**.

1. Les unités du Système international

Le **Système international d'unités** (SI) repose sur sept unités de base.

Grandeur	Unité SI	Symbole
longueur	mètre	m
masse	kilogramme	kg
durée	seconde	s
intensité du courant électrique	ampère	A
température	kelvin	K
quantité de matière	mole	mol
intensité lumineuse	candela	cd

Cap bac — l'indispensable

Les symboles d'unités sont **invariables**, sans point final et séparés de la valeur par un espace : 25 kg, 3,0 s, 293 K. Le kelvin s'écrit **K**, sans symbole degré ; une température peut néanmoins s'exprimer en degrés Celsius, avec $T(\text{K}) = \theta(^{\circ}\text{C}) + 273,15$.

Les autres unités se construisent à partir des unités de base. Elles sont dites **dérivées**. Certaines possèdent un nom particulier.

Grandeur	Unité	Symbole	En unités de base
fréquence	hertz	Hz	s^{-1}
force	newton	N	$\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$
pression	pascal	Pa	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$
énergie	joule	J	$\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}$
puissance	watt	W	$\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-3}$
charge électrique	coulomb	C	$\text{A}\cdot\text{s}$
tension électrique	volt	V	$\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-3}\cdot\text{A}^{-1}$
résistance électrique	ohm	Ω	$\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-3}\cdot\text{A}^{-2}$

Il n'est pas question d'apprendre ces équivalences par cœur, on peut les retrouver en se rappelant d'une formule.

Exemple 1. Rappelons nous la formule de l'énergie cinétique : $E_C = \frac{1}{2} m v^2$. Comme le terme de gauche est en joule et que l'équation est homogène, on obtient :

$$1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$$

Exemple 2. Vous avez utilisé en première l'expression de la puissance utilisée par un récepteur électrique : $P = U I$. Comme le terme de gauche est en watt (joule/s) et que l'équation est homogène, on obtient :

$$1 \text{ V} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} / \text{s}}{\text{A}} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-1}$$

Unités usuelles qui ne sont pas des unités SI

La minute, l'heure, le litre, le degré Celsius et l'électronvolt ne sont pas des unités de base du SI, mais elles sont très utilisées. Avant une application numérique, on convertit en unités SI sauf si la relation impose ou autorise explicitement d'autres unités cohérentes.

$$1 \text{ min} = 60 \text{ s}, \quad 1 \text{ h} = 3600 \text{ s}, \quad 1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3.$$

En **chimie**, les unités de masse et de volume communément utilisées sont le gramme et le litre, et non le kg et le m³.

2. Les préfixes : remplacer un symbole par une puissance de dix

Un préfixe placé devant une unité la multiplie par une puissance de dix.

Nom	téra	giga	méga	kilo	hecto	déca	déci	centi	milli	micro	nano	pico	femto
Préfixe	T	G	M	k	h	da	d	c	m	μ	n	p	f
Puissance	10^{12}	10^9	10^6	10^3	10^2	10^1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}

Pour convertir sans se tromper, on **remplace le préfixe par sa puissance de dix**, puis on simplifie.

Exemples.

$$4,7 \text{ km} = 4,7 \times 10^3 \text{ m}.$$

$$35 \text{ mm} = 35 \times 10^{-3} \text{ m} = 3,5 \times 10^{-2} \text{ m}.$$

Outil mathématique

Contrôle rapide. Vers une unité plus petite, la valeur numérique augmente : $2 \text{ m} = 200 \text{ cm}$. Vers une unité plus grande, elle diminue : $2 \text{ m} = 0,002 \text{ km}$.

Attention aux majuscules : m signifie mètre ou milli selon sa position, alors que M est le préfixe méga. Ainsi $1 \text{ MW} = 10^6 \text{ W}$, mais $1 \text{ mW} = 10^{-3} \text{ W}$.

3. Convertir des unités élevées à une puissance

Quand une unité est au carré ou au cube, le facteur de conversion l'est aussi.

Conversion d'une unité élevée à une puissance

Comme $1 \text{ km} = 10^3 \text{ m}$:

$$1 \text{ km}^n = (10^3 \text{ m})^n = 10^{3n} \text{ m}^n.$$

Exemple. Pour une aire :

$$1 \text{ km}^2 = (10^3 \text{ m})^2 = 10^6 \text{ m}^2,$$

donc $2,5 \text{ km}^2 = 2,5 \times 10^6 \text{ m}^2$.

Exemple. Pour un volume :

$$1 \text{ cm}^3 = (10^{-2} \text{ m})^3 = 10^{-6} \text{ m}^3.$$

Deux égalités sont particulièrement utiles :

$$1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3, \quad 1 \text{ mL} = 1 \text{ cm}^3.$$

Pièges fréquents

- Une conversion conserve la **nature de la grandeur** : une aire en m^2 devient une aire en cm^2 , jamais une longueur en m.
- Il est impossible de « convertir des m^2 en m ». Si un carré a une aire $S = 9 \text{ m}^2$, on peut calculer son côté $a = \sqrt{S} = 3 \text{ m}$; ce calcul n'est pas une conversion.

4. Convertir une unité composée

Une unité composée est un produit ou un quotient d'unités. On remplace **chaque unité** par son équivalent, puis on simplifie comme dans un calcul littéral.

Vitesse : de $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ à $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

Exemple.

$$72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 72 \times \frac{10^3 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{72}{3,6} = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

On en déduit les raccourcis :

$$\begin{aligned}\text{km}\cdot\text{h}^{-1} &\longrightarrow \text{m}\cdot\text{s}^{-1} : \text{diviser par } 3,6, \\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} &\longrightarrow \text{km}\cdot\text{h}^{-1} : \text{multiplier par } 3,6.\end{aligned}$$

Masse volumique

Exemple. Convertissons $1,20 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ en $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$:

$$1,20 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1,20 \times \frac{10^{-3} \text{ kg}}{10^{-6} \text{ m}^3} = 1,20 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}.$$

Concentration

Exemple. Comme $1 \text{ L} = 10^{-3} \text{ m}^3$,

$$0,20 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1} = \frac{0,20 \text{ mol}}{10^{-3} \text{ m}^3} = 2,0 \times 10^2 \text{ mol}\cdot\text{m}^{-3}.$$

Cap bac — l'indispensable

Dans une application numérique :

1. écrire d'abord la relation littérale ;
2. convertir les données dans un système d'unités cohérent ;
3. remplacer les grandeurs par leurs valeurs ;
4. écrire le résultat avec son unité.

Ne jamais appliquer un « facteur appris » à une unité composée inconnue : remplacer chaque préfixe par une puissance de dix reste la méthode sûre.

5. Vérifier l'homogénéité d'une équation avec les unités

Une équation est **homogène** lorsque les deux membres ont la même unité. Dans une somme ou une différence, tous les termes doivent également avoir la même unité.

Calcul d'unité

On traite les unités comme des symboles algébriques : on peut les multiplier, les diviser, les élever à une puissance et les simplifier.

Les nombres purs, comme 2, π ou un pourcentage écrit sous forme décimale, n'ont pas d'unité.

Exemple. La relation $v = d/t$ est homogène :

$$[v] = \frac{[d]}{[t]} = \frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Ici, les crochets signifient « unité de » et non « valeur de ».

Exemple. Vérifions $E_c = \frac{1}{2}m \cdot v^2$:

$$[E_c] = \text{kg} \times (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})^2 = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} = \text{J}.$$

L'unité obtenue est bien celle d'une énergie.

Exemple. La relation $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at$ est fautive :

$$[x_0] = \text{m}, \quad [v_0 t] = \text{m}, \quad [at] = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

On ne peut pas additionner une longueur et une vitesse. Le dernier terme doit être $\frac{1}{2}at^2$, d'unité $\text{m} \cdot \text{s}^{-2} \times \text{s}^2 = \text{m}$.

Ce que l'homogénéité permet — et ne permet pas

- Une relation **non homogène est nécessairement fautive**.
- Une relation homogène n'est pas nécessairement juste : $E = mv^2$ et $E = \frac{1}{2}mv^2$ ont la même unité, mais une seule donne l'énergie cinétique classique.
- L'argument d'un logarithme, d'une exponentielle ou d'une fonction trigonométrique doit être **sans unité**. Par exemple, $e^{-t/\tau}$ convient car t/τ est le quotient de deux durées.

Outil mathématique

Méthode de contrôle au brouillon. Remplacer chaque grandeur par son unité SI, effectuer les produits, quotients et puissances, puis comparer tous les termes et les deux membres. Ce contrôle ne remplace pas la connaissance de la loi, mais il repère rapidement une puissance, un facteur de temps ou une conversion oubliés.

6. Auto-test

Répondez avant de regarder les corrigés.

1. Donner l'unité SI de la masse, de la température et de l'intensité électrique.
2. Convertir $6,2 \mu\text{m}$ en m et $4,5 \text{ MW}$ en W.
3. Convertir $3,0 \text{ cm}^2$ en m^2 et 250 mL en m^3 .
4. Convertir $90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.
5. Convertir $2,7 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$.
6. La relation $P = E \cdot t$ est-elle homogène si P est une puissance, E une énergie et t une durée ? La corriger si nécessaire.
7. Parmi $x = v/t$, $x = v \cdot t$ et $x = v \cdot t^2$, quelle relation peut donner une longueur à partir d'une vitesse et d'une durée ?

Corrigés

1. Masse : kg ; température : K ; intensité électrique : A.
2. $6,2 \mu\text{m} = 6,2 \times 10^{-6} \text{ m}$; $4,5 \text{ MW} = 4,5 \times 10^6 \text{ W}$.

3. $3,0 \text{ cm}^2 = 3,0 \times (10^{-2} \text{ m})^2 = 3,0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$; $250 \text{ mL} = 250 \times 10^{-6} \text{ m}^3 = 2,50 \times 10^{-4} \text{ m}^3$.
4. $90/3,6 = 25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.
5. $2,7 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3} = 2,7 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.
6. $[E \cdot t] = \text{J}\cdot\text{s}$, différent de $[P] = W = \text{J}\cdot\text{s}^{-1}$: la relation n'est pas homogène. La relation correcte est $P = E/t$.
7. $[v \cdot t] = \text{m}\cdot\text{s}^{-1} \times \text{s} = \text{m}$: seule la relation $x = v \cdot t$ peut donner une longueur.

Cap études supérieures

Analyse dimensionnelle : raisonner sans choisir d'unité

L'unité dépend d'une convention; la **dimension** décrit la nature physique de la grandeur. Les sept grandeurs de base ont pour dimensions usuelles :

Grandeur de base	Dimension	Unité SI
masse	M	kg
longueur	L	m
durée	T	s
courant électrique	I	A
température	Θ	K
quantité de matière	N	mol
intensité lumineuse	J	cd

Ainsi une vitesse a pour dimension $[v] = \text{L T}^{-1}$ et une force $[F] = \text{M L T}^{-2}$. Une constante pure, un angle exprimé en radians ou un rapport de deux grandeurs de même dimension a la dimension 1.

L'analyse dimensionnelle peut aussi retrouver la forme d'une loi. Supposons que la période T d'un pendule dépende de sa longueur ℓ et de l'intensité de la pesanteur g sous la forme $T = C \ell^a g^b$, où C est sans dimension. Alors

$$\text{T} = \text{L}^a (\text{L T}^{-2})^b = \text{L}^{a+b} \text{T}^{-2b}.$$

L'identification des exposants donne $a + b = 0$ et $-2b = 1$, donc $a = 1/2$ et $b = -1/2$:

$$T = C \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

La méthode ne peut pas déterminer le nombre pur C ; pour ce pendule, une étude dynamique montre que $C = 2\pi$ dans l'approximation des petites oscillations.