

Résoudre $y' + a y = b$

Le condensateur qui se charge, le noyau qui se désintègre, le café qui refroidit, la bille qui tombe dans un liquide, la concentration d'un réactif qui suit une loi d'ordre 1 ... : tous ces phénomènes obéissent à **la même équation**, $y' + a y = b$. Savoir la résoudre, c'est pouvoir expliquer un grand nombre de situations physiques. Cette fiche en donne la méthode ; elle s'appuie sur l'**exponentielle** (fiche M6), dont elle réutilise la dérivée, le temps caractéristique τ et la lecture graphique.

1. Reconnaître et écrire l'équation $y' + a y = b$

Une **équation différentielle** relie une grandeur inconnue $y(t)$ à sa **dérivée** y' . Celle qui nous occupe est parmi les plus simples : y' et y y apparaissent au premier degré, avec des **coefficients constants**.

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Une équation différentielle **linéaire du premier ordre à coefficients constants** s'écrit, après rangement :

$$y' + a y = b, \quad a \text{ et } b \text{ constants.}$$

Exemple. Un mobile a une vitesse $v(t)$ régie par $2v' + v = 6$. On divise par 2 pour obtenir l'équation différentielle sous la forme voulue :

$$v' + 0,5 v = 3 \quad \Rightarrow \quad a = 0,5, \quad b = 3.$$

2. La durée caractéristique d'évolution

En physique, la grandeur y décrit très souvent une **évolution au cours du temps** $y(t)$: la variable est alors le temps t , et y' désigne la dérivée temporelle $\frac{dy}{dt}$. C'est le cas de tous les exemples de cette fiche.

L'équation donne des informations sur la durée de l'évolution de y avant même de la résoudre. Dans $y' + a y = b$, les deux termes de gauche s'additionnent : ils ont donc la **même dimension**. Or y' est une variation de y par unité de temps, soit $[y'] = [y]/s$; pour que $a y$ ait la même dimension, il faut que

$$[a] = \frac{1}{s}, \quad \text{et donc} \quad \left[\frac{1}{a} \right] = s.$$

Une **durée** est ainsi inscrite dans l'équation.

Durée caractéristique

La **durée caractéristique** (ou temps caractéristique) de l'équation est

$$\tau = \frac{1}{a} \quad (\text{en } s).$$

Elle donne l'ordre de grandeur de la durée d'évolution de la grandeur y .

C'est aussi un garde-fou commode : si un calcul attribue à $\tau = 1/a$ une autre dimension qu'une durée, c'est qu'une erreur s'est glissée avant.

Exemple. Dans l'exemple précédent, $a = 0,5 \text{ s}^{-1}$, donc $\tau = 1/0,5 = 2,0 \text{ s}$: la vitesse évolue de façon sensible sur quelques secondes.

3. Solution générale

Toutes les solutions ont la **même forme** : un terme qui s'estompe au cours du temps et un autre qui perdure.

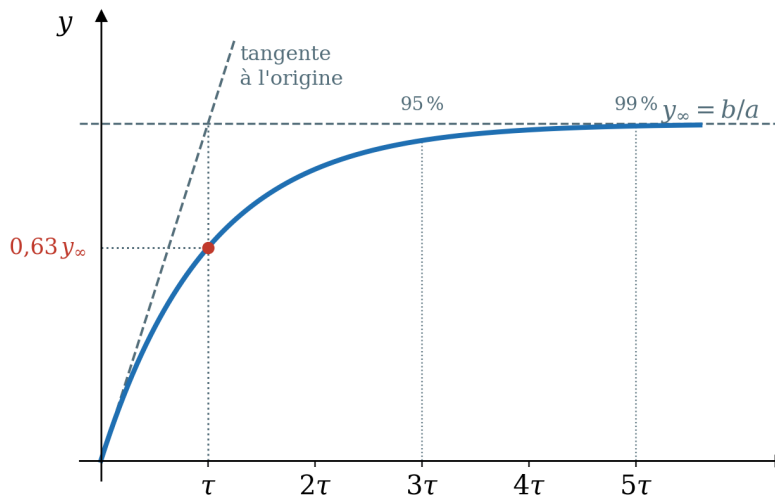
Solution générale

La solution générale de $y' + a y = b$ est

$$y(t) = A e^{-t/\tau} + B \quad \tau = \frac{1}{a},$$

où A et B sont deux constantes à déterminer.

- B est la valeur vers laquelle tend y : c'est le **régime permanent** (quand t grandit, $e^{-t/\tau} \rightarrow 0$, donc $y \rightarrow B$).
- $A e^{-t/\tau}$ est un terme **transitoire** : il **disparaît** en quelques τ (fiche M6 : 37 % restants à τ , moins de 1 % à 5τ).



La courbe **part de** $y(0)$ et tend vers l'asymptote $y_{\infty} = B$. La **tangente à l'origine**

coupe l'asymptote à $t = \tau$, et y a franchi 63 % de l'écart au bout de τ (lectures de τ vues en **M6**).

4. Détermination des constantes

Les deux constantes se trouvent l'une après l'autre — d'abord B (l'arrivée), puis A (le départ).

Cap bac — l'indispensable

Méthode — trouver B puis A

1. **Régime permanent.** Au bout d'un temps long $t \rightarrow +\infty$, y ne varie plus, donc :

- $y' = 0$, et l'équation différentielle s'écrit $a y(t \rightarrow +\infty) = b$;
- $e^{-t/\tau} \rightarrow 0$ et la solution générale s'écrit $y(t \rightarrow +\infty) = B$;
- Finalement : $a B = b$, d'où

$$B = \frac{b}{a}.$$

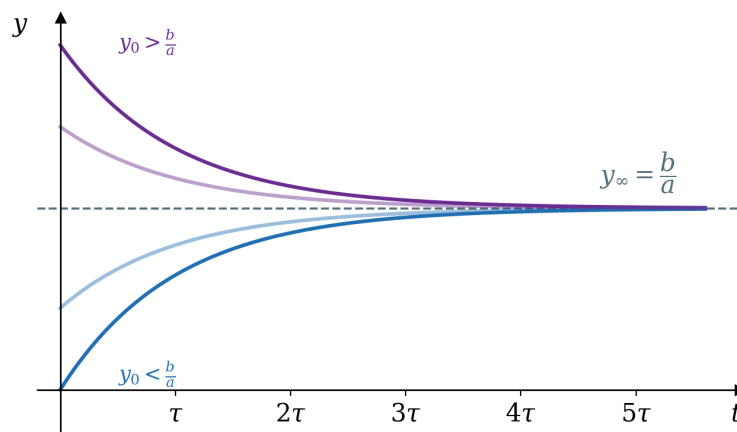
2. **Condition initiale.** À $t = 0$:

- la solution s'écrit $y(0) = A e^0 + B = A + B$ d'où

$$A = y(0) - B = y(0) - \frac{b}{a}.$$

3. La solution de l'équation se trouve en injectant les expressions trouvées de A et B dans la solution générale $y(t) = A e^{-t/\tau} + B$.

Quel que soit le point de départ $y(0)$, la grandeur **rejoint la même valeur** $B = b/a$: le régime permanent ne dépend pas des conditions initiales, seul le chemin pour y arriver en dépend.



Exemple. Reprenons $v' + 0,5 v = 3$ (donc $\tau = 2,0$ s), avec initialement $v(0) = 0$.

1. Régime permanent : $B = b/a = 3/0,5 = 6,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

2. Condition initiale : $A = v(0) - B = 0 - 6,0 = -6,0$.

3. Solution :

$$v(t) = -6,0 e^{-t/2,0} + 6,0 = 6,0 (1 - e^{-t/2,0}).$$

La vitesse part de 0 et tend vers $6,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ en quelques secondes.

5. Vérification

Un réflexe à adopter : vérifier que la solution trouvée fonctionne en l'injectant dans l'équation de départ. Avec $y = A e^{-t/\tau} + B \Rightarrow y' = -\frac{A}{\tau} e^{-t/\tau}$:

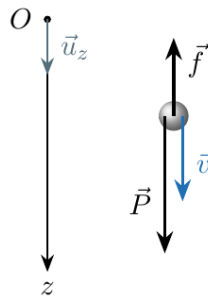
$$y' + a y = -\frac{A}{\tau} e^{-t/\tau} + a (A e^{-t/\tau} + B) = \underbrace{\left(a - \frac{1}{\tau}\right)}_{=0} A e^{-t/\tau} + a B = a B = b.$$

Le terme en $e^{-t/\tau}$ s'annule parce que $\tau = 1/a$, et il reste $a B = b$ parce que $B = b/a$. On vérifie ainsi qu'un candidat proposé est bien solution de l'équation différentielle.

6. Application en physique : chute avec frottement fluide

Une bille tombe verticalement dans un liquide visqueux. On cherche à exprimer l'évolution temporelle de sa vitesse $v(t)$ au cours de la chute.

- **Référentiel** : terrestre, supposé galiléen.
- **Système** : la bille, de masse m .
- **Bilan des forces** : le **poids** $\vec{P} = m \vec{g}$ (vertical, vers le bas) et le **frottement fluide** $\vec{f} = -k \vec{v}$ (modèle linéaire, le signe négatif indique que la force a un sens opposé à celui de la vitesse). La poussée d'Archimède est supposée négligeable.



- **Deuxième loi de Newton** :

$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{f} = m \vec{g} - k \vec{v}.$$

- **Accélération** : par définition, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

- **Projection sur un axe Oz vertical orienté vers le bas** : avec $\vec{g} = g \vec{u}_z$, $\vec{v} = v \vec{u}_z$ et $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_z$, on obtient

$$m \frac{dv}{dt} = mg - k v.$$

On divise par m pour obtenir la forme connue :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g$$

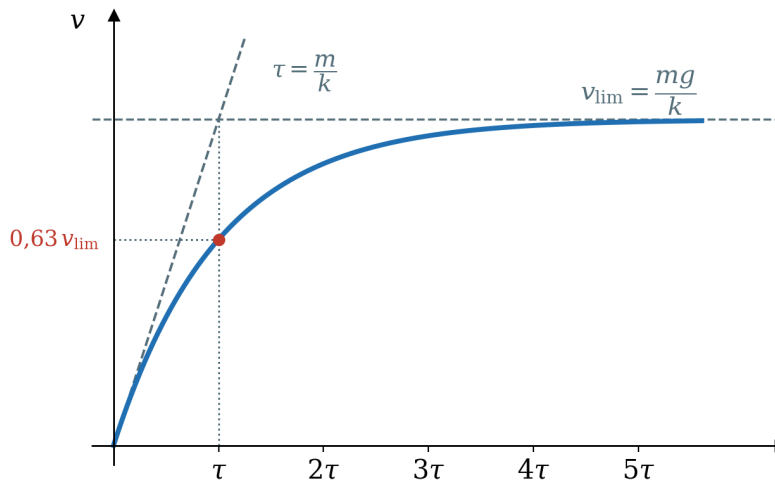
On reconnaît l'équation différentielle avec les coefficients $a = \frac{k}{m}$, $b = g$

On applique alors la méthode :

- **Temps caractéristique** : $\tau = \frac{1}{a} = \frac{m}{k}$.
- **Régime permanent** : $B = \frac{b}{a} = \frac{g}{k/m} = \frac{mg}{k}$; c'est la **vitesse limite** v_{lim} .
- **Condition initiale** (lâchée sans vitesse, $v(0) = 0$) : $A = v(0) - B = -\frac{mg}{k}$.

$$v(t) = \frac{mg}{k} (1 - e^{-t/\tau}), \quad \tau = \frac{m}{k}, \quad v_{\text{lim}} = \frac{mg}{k}$$

La vitesse croît de 0 vers $v_{\text{lim}} = mg/k$, atteinte à moins de 1 % près au bout de 5τ .



Cap études supérieures

Pour aller plus loin — quand la variable n'est pas le temps. Rien n'oblige y à dépendre du temps. Lorsqu'une onde sonore traverse un milieu qui l'**absorbe**, son intensité I décroît avec la **distance parcourue** x : chaque tranche de matériau en retire une même fraction. On retrouve alors

$$\frac{dI}{dx} = -\frac{1}{\ell} I \quad \Rightarrow \quad I(x) = I_0 e^{-x/\ell},$$

la **même équation** $y' + a y = 0$, mais la dérivée est prise par rapport à x . La lecture dimensionnelle donne cette fois $[1/a] = [\text{longueur}]$: la constante $\ell = 1/a$ est une **longueur caractéristique** — la distance au bout de laquelle l'intensité est divisée par e .

C'est l'**atténuation par absorption** du son (chapitre 9) : dans l'air, une voix (~ 1 kHz) garde une longueur caractéristique de l'ordre du kilomètre, bien plus courte dans un mur épais. Selon que l'on dérive par rapport au **temps** ou à l'**espace**, la même équation livre une **durée** τ ou une **longueur** ℓ : dans les deux cas, $1/a$ fixe l'échelle de l'évolution.

Pièges fréquents

- **Lire a et b trop tôt.** On met **d'abord** un coefficient 1 devant y' (on divise), **ensuite** on lit a et b .
- **Confondre a et τ .** $\tau = 1/a$, l'**inverse** — et τ est un temps (en s) : la vérification de dimension lève le doute.
- **Oublier que $B = b/a$, pas b .** Le régime permanent, c'est $y' = 0$ dans l'équation.
- **Se tromper de signe pour A .** $A = y(0) - b/a$: négatif si y **monte** vers B , positif si y **descend** vers B .
- **Écrire $e^{-t/a}$ ou $e^{-at\tau}$.** L'argument est $-t/\tau$, sans dimension (t et τ en secondes).
- **Croire que y atteint B .** Elle s'en **approche** : 63 % à τ , plus de 99 % à 5τ .

7. Auto-test

Répondez avant de regarder les corrigés.

1. Mettre $3y' + 6y = 12$ sous la forme $y' + a y = b$. Donner a , b , puis τ et le régime permanent B .
2. Pour $y' + 0,5y = 4$, que vaut la grandeur en régime permanent ?
3. Résoudre $y' + \frac{y}{4} = 2$ (avec t en s) pour $y(0) = 0$: donner τ , B , A , puis $y(t)$.
4. Une chute vérifie $v' + \frac{k}{m}v = g$. Donner τ et la vitesse limite v_{lim} . Vers quoi tend v ?
5. Vérifier que $y(t) = 8(1 - e^{-t/4})$ est bien solution de $y' + \frac{y}{4} = 2$.
6. Un élève écrit $\tau = a$. Où est l'erreur, et comment la repérer en une ligne ?
7. **Cinétique chimique (chapitre 7).** Une réaction d'ordre 1 par rapport à un réactif X vérifie $\frac{d[X]}{dt} = -k[X]$ ($k > 0$). L'écrire sous la forme $y' + a y = b$, donner τ et le régime permanent, puis retrouver $[X](t)$ sachant $[X](0) = [X]_0$.

Corrigés

1. On divise par 3 : $y' + 2y = 4$, donc $a = 2 \text{ s}^{-1}$, $b = 4$. $\tau = 1/a = 0,5 \text{ s}$; $B = b/a = 2$.
2. Régime permanent : $y' = 0 \Rightarrow 0,5 y = 4 \Rightarrow B = 8$.
3. $a = 1/4$, $b = 2$: $\tau = 1/a = 4,0 \text{ s}$; $B = b/a = 8,0$; $A = y(0) - B = -8,0$; d'où $y(t) = 8,0 (1 - e^{-t/4,0})$.
4. $\tau = m/k$; $v_{\text{lim}} = B = g/(k/m) = mg/k$. La vitesse tend vers v_{lim} (atteinte à 5τ près).
5. $y' = 8 \times \frac{1}{4} e^{-t/4} = 2 e^{-t/4}$; et $\frac{y}{4} = 2 (1 - e^{-t/4}) = 2 - 2 e^{-t/4}$. Somme : $y' + \frac{y}{4} = 2 e^{-t/4} + 2 - 2 e^{-t/4} = 2$. C'est bien l'équation de départ.
6. $\tau = 1/a$, l'**inverse** de a , pas a . Repérage immédiat par la **dimension** : a est en s^{-1} , un temps ne peut pas lui être égal.
7. $[X]' + k[X] = 0$: $a = k$, $b = 0$. Donc $\tau = 1/k$, et le régime permanent vaut $B = b/a = 0$ (la concentration s'annule à la longue). La condition initiale donne $A = [X]_0 - 0 = [X]_0$, d'où

$$[X](t) = [X]_0 e^{-kt}.$$

C'est la décroissance exponentielle de la cinétique d'ordre 1 (fiche M6), ici comme **cas particulier** ($b = 0$) de $y' + a y = b$.