

Primitives : intégrer pour remonter la dérivée

La fiche M5 a appris à **descendre** : partant d'une grandeur, sa dérivée donne sa **vi-tesse de variation**. Mais en physique, la situation est souvent **inverse** : on connaît la vitesse à laquelle une grandeur varie, et on voudrait retrouver la grandeur elle-même. Il faut donc savoir **remonter** la dérivée. Chercher cette fonction s'appelle chercher une **primitive**, ou **intégrer**. Cette opération réserve une surprise : elle ne donne pas *une* réponse, mais une **infinité**.

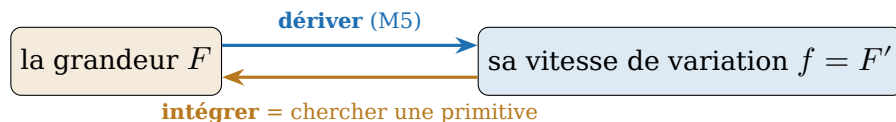
1. La primitive : l'opération inverse de la dérivée

Primitive d'une fonction

Une fonction F est une **primitive** de la fonction f lorsque **dériver** F **redonne** f :

$$F' = f.$$

Intégrer f , c'est chercher ses primitives. En physique, l'instruction « intégrer $f(t)$ par rapport au temps » signifie donc : trouver les fonctions $F(t)$ dont la dérivée vaut $f(t)$.



Dans cette fiche, le mot **intégrer** signifie donc simplement chercher « quelle fonction, une fois dérivée, donne celle-ci ? ». Il ne désigne pas ici un calcul d'aire. Et comme on sait dériver, on sait **toujours vérifier** sa réponse.

Exemple. $F(t) = 3t$ est une primitive de $f(t) = 3$. Vérification : $(3t)' = 3$.

2. La surprise : il y en a une infinité

Reprenons l'exemple. $F(t) = 3t$ convient. Mais $F(t) = 3t + 5$ aussi :

$$(3t + 5)' = 3 + 0 = 3.$$

Et $3t - 12$ ou $3t + \pi$ également. **La dérivée d'une constante étant nulle**, on peut ajouter n'importe quel nombre sans rien changer.

Ensemble des primitives

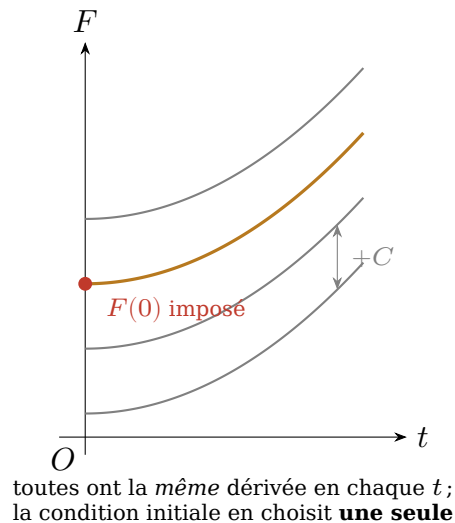
Si F est une primitive de f , alors **toutes** les fonctions

$$F(t) + C \quad (C \text{ constante quelconque})$$

sont aussi des primitives de f — et il n'y en a pas d'autres.

On ne dit donc jamais « **la** » primitive, mais « **une** » primitive.

Graphiquement, ces primitives forment une **famille de courbes parallèles** : la même courbe, translatée verticalement. En chaque abscisse, elles ont toutes **la même pente** — c'est bien pour cela qu'elles ont toutes la même dérivée.



Exemple. Les fonctions t^2 , $t^2 + 1$ et $t^2 - 7$ ont toutes pour dérivée $2t$: ce sont trois primitives de $f(t) = 2t$.

3. Les primitives dont on a besoin

Il n'en faut que très peu. On les obtient toutes en lisant **à l'envers** le tableau des dérivées de la fiche M5.

Cap bac — l'indispensable

Fonction $f(t)$	Une primitive $F(t)$
k (constante)	$kt + C$
kt	$\frac{1}{2}kt^2 + C$
$at + b$	$\frac{1}{2}at^2 + bt + C$

Règle de la somme : une primitive d'une somme est la **somme** des primitives (on traite chaque terme séparément).

Réflexe : toujours **vérifier en dérivant** le résultat.

Exemple. Une primitive de $f(t) = 6t$ est $F(t) = 3t^2 + C$. Vérification : $(3t^2)' = 3 \times 2t = 6t$.

Exemple. Une primitive de $f(t) = -10t + 4$ est $F(t) = -5t^2 + 4t + C$. Vérification : $(-5t^2 + 4t)' = -10t + 4$.

4. Lever l'indétermination : la condition initiale

C'est **le** point qu'il faut comprendre. Une infinité de primitives, c'est beaucoup trop : en physique, la grandeur cherchée est **une** fonction bien précise. Ce qui choisit la bonne, c'est une **information supplémentaire** — la valeur de F à un instant connu, presque toujours $t = 0$. On l'appelle la **condition initiale**.

Sur la figure du §2 : toutes les courbes ont la même forme, mais **une seule** passe par le point imposé. La condition initiale, c'est ce point.

Cap bac — l'indispensable

Méthode — déterminer la constante

1. Écrire la primitive **avec sa constante** : $F(t) = \dots + C$. (Ne jamais l'oublier : c'est l'erreur la plus fréquente.)
2. Écrire la **condition initiale** donnée par l'énoncé, par exemple $F(0) = F_0$.
3. **Remplacer** t par 0 dans l'expression et **résoudre** en C .
4. **Réécrire** $F(t)$ avec la valeur trouvée : c'est la réponse.

Exemple. Cherchons la primitive F de $f(t) = 4$ qui vérifie $F(0) = 5$.

1. $F(t) = 4t + C$.
2. Condition : $F(0) = 5$.
3. $F(0) = 4 \times 0 + C = C$, donc $C = 5$.
4. $F(t) = 4t + 5$.

Vérification : $F' = 4$ et $F(0) = 5$.

Exemple. Même chose avec $f(t) = -3t + 4$ et $F(0) = 2$: $F(t) = -1,5t^2 + 4t + C$; $F(0) = C = 2$; d'où $F(t) = -1,5t^2 + 4t + 2$.

Remarque. Quand la condition est donnée à $t = 0$, la constante **est** tout simplement la valeur initiale — mais ce n'est vrai que dans ce cas. Si la condition est donnée ailleurs (par exemple $F(2) = 7$), il faut faire le calcul.

Pièges fréquents

- **Oublier la constante.** C'est l'erreur numéro un. Tant que la condition initiale n'a pas été utilisée, le $+C$ doit figurer.
- **Dire « la » primitive.** Il y en a une infinité ; on dit « **une** primitive », et on parle de « la primitive **telle que** $F(0) = \dots$ ».
- **Croire que C vaut toujours la valeur initiale.** C'est vrai seulement quand la condition est donnée en $t = 0$. Ailleurs, il faut résoudre.
- **Se tromper de constante avec deux intégrations.** Deux remontées $\Rightarrow$ deux constantes et deux conditions ; on détermine C_1 **avant** C_2 .
- **Oublier le facteur $\frac{1}{2}$.** Une primitive de kt est $\frac{1}{2}kt^2$, pas kt^2 — vérifier en dérivant lève le doute en trois secondes.
- **Confondre les deux sens.** Dériver **descend**, la primitive **remonte** : en cas d'hésitation, dériver sa réponse doit redonner le point de départ.

6. Auto-test

Répondez avant de regarder les corrigés.

1. Vérifier que $F(t) = 5t$ est une primitive de $f(t) = 5$. En existe-t-il d'autres ? Lesquelles ?
2. Donner une primitive de $f(t) = 8t$.
3. Déterminer la primitive F de $f(t) = -3t + 4$ telle que $F(0) = 2$.
4. Pourquoi ne peut-on pas parler de « la » primitive d'une fonction ?
5. Un élève écrit : « une primitive de $f(t) = 2t$ est $F(t) = 2t^2$ ». Où est l'erreur, et comment l'aurait-il détectée seul ?

Corrigés

1. $(5t)' = 5 = f(t)$. Oui : **toutes** les fonctions $F(t) = 5t + C$, pour n'importe quelle constante C .
2. $F(t) = 4t^2$ (ou $4t^2 + C$). Vérification : $(4t^2)' = 8t$.
3. $F(t) = -1,5t^2 + 4t + C$; $F(0) = C = 2$; d'où $F(t) = -1,5t^2 + 4t + 2$.
4. Parce qu'il y en a une **infinité** : elles diffèrent d'une constante (la dérivée d'une constante étant nulle). Il faut une **condition initiale** pour en désigner une seule.
5. $(2t^2)' = 4t$, et non $2t$: il manque le facteur $\frac{1}{2}$ — la bonne réponse est $F(t) = t^2 + C$. Il l'aurait détecté **en dérivant sa réponse** : c'est le réflexe de vérification systématique.