

Les vecteurs

En physique, beaucoup de grandeurs ne se contentent pas d'un nombre. Dire qu'une voiture roule à $50 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ ne suffit pas : encore faut-il savoir **vers où**. Dire qu'on pousse une caisse avec une force de 200 N ne suffit pas : on peut la pousser vers l'avant, ou de travers, et le résultat n'est pas le même. L'objet mathématique qui porte à la fois une **valeur** et une **orientation** est le **vecteur**. Le vecteur est l'outil de toute la mécanique, et il vaut la peine d'y passer un peu de temps.

1. Pourquoi des vecteurs ?

Comparons deux sortes de grandeurs.

- La **masse** d'un objet (1,2 kg), sa **température** (20 °C), sa **durée** de chute (3,0 s) : un **nombre** (avec son unité) suffit à les décrire complètement. On les appelle des grandeurs **scalaires**.
- La **vitesse** d'un avion, la **force** exercée par un ressort, l'**accélération** d'une voiture : il faut en plus préciser **dans quelle direction** et **dans quel sens**. Ce sont des grandeurs **vectérielles**.

Grandeurs scalaires et vectorielles

Une grandeur **scalaire** est entièrement décrite par un **nombre** (et une unité). Une grandeur **vectérielle** exige en plus une **direction** et un **sens** : on la représente par un **vecteur**.

Exemple. Deux avions volent tous les deux à $800 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$: même **valeur** de vitesse. Mais l'un va vers Paris et l'autre vers Tokyo : leurs **vecteurs vitesse** sont différents. Le nombre seul, $800 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$, ne dit pas tout — c'est bien pour cela qu'il faut un vecteur.

2. Qu'est-ce qu'un vecteur ?

On représente un vecteur par une **flèche**. Trois informations, et trois seulement, le définissent.

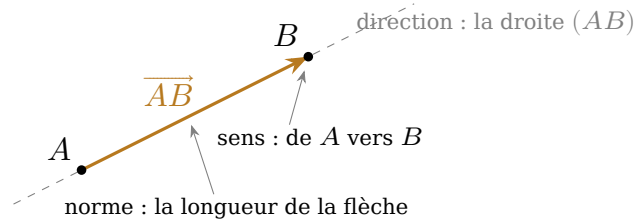
Caractéristiques d'un vecteur

Un **vecteur** est caractérisé par :

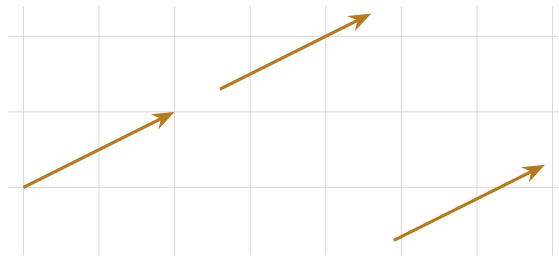
- sa **direction** : la droite qui le porte (par exemple « la verticale », ou « la droite (AB) »);
- son **sens** : sur cette droite, l'un des deux sens de parcours (indiqué par la **pointe** de la flèche);

- sa **norme** : la longueur de la flèche, c'est-à-dire la **valeur** de la grandeur (toujours positive).

Le vecteur qui va du point A au point B se note $\overrightarrow{AB}$; sa norme se note $\|\overrightarrow{AB}\|$.



Un vecteur n'est pas attaché à un point. C'est un point souvent mal compris. Deux flèches dessinées à deux endroits différents représentent le **même** vecteur dès lors qu'elles ont **même direction, même sens et même norme**. Le vecteur, c'est le « déplacement », pas l'endroit où on le dessine.



trois flèches, **un seul et même vecteur** : mêmes direction, sens et norme

Exemple. Sur un plan, « avancer de 3 cases à droite et 2 cases en haut » est un vecteur. Que l'on parte du coin de la carte ou de son centre, c'est le même déplacement, donc le même vecteur.

Cap bac — l'indispensable

Direction et sens, ce n'est pas la même chose. Une **direction** est une droite : elle offre **deux sens** opposés. « Verticale » est une direction ; « vers le haut » et « vers le bas » sont ses deux sens. Dire « le vecteur est dirigé vers le bas » mélange les deux ; on dit : « de direction verticale, de sens descendant ».

3. Additionner deux vecteurs

Additionner deux vecteurs, c'est **enchaîner** les deux déplacements : on place le second **au bout** du premier, et le résultat va du début du premier à la fin du second. C'est la **relation de Chasles**.

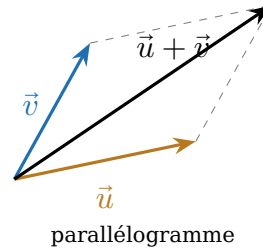
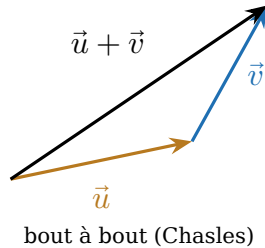
Relation de Chasles

Pour trois points A, B, C :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Pour additionner deux vecteurs, on **reporte le second à l'extrémité du premier** (à la règle et à l'équerre); la somme joint l'origine du premier à l'extrémité du second.

Comme un vecteur n'est pas attaché à un point (§2), on peut aussi les dessiner **à partir d'une même origine** et fermer le **parallélogramme** : on obtient exactement la même somme.



4. Multiplier par un nombre, soustraire

Multiplication d'un vecteur par un nombre

Le vecteur $k \cdot \vec{u}$ (avec k un nombre réel) a :

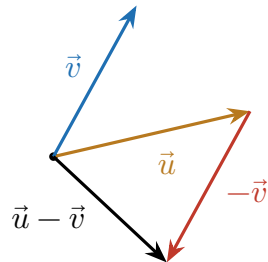
- la **même direction** que $\vec{u}$;
- le **même sens** si $k > 0$, le **sens opposé** si $k < 0$;
- une **norme** multipliée par $|k|$: $\|k \cdot \vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$.

En particulier, l'**opposé** $-\vec{u}$ a même direction et même norme que $\vec{u}$, mais le **sens contraire**.

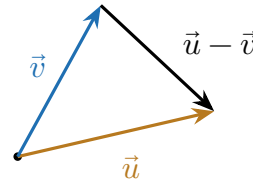
Soustraire, c'est ajouter l'opposé :

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}).$$

En pratique, il y a une construction bien plus commode. Dessinons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **à partir d'une même origine** : alors $\vec{u} - \vec{v}$ est le vecteur qui va de **l'extrémité de $\vec{v}$** vers **l'extrémité de $\vec{u}$** . (C'est Chasles : $\vec{v} + (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}$.)



ajouter l'opposé : on reporte $-\vec{v}$
à l'extrémité de $\vec{u}$



même origine : $\vec{u} - \vec{v}$ va de la pointe de $\vec{v}$
à la pointe de $\vec{u}$

Exemple. Une voiture roule vers l'est à $\vec{v}_1$ ($20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$), puis, après un virage, vers le nord à $\vec{v}_2$ ($20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$). Sa vitesse a-t-elle changé ? La **norme** n'a pas bougé, mais le **vecteur**,

si : la variation $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ n'est pas nulle. On la construit en traçant $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ à partir d'une même origine et en joignant la pointe de $\vec{v}_1$ à celle de $\vec{v}_2$. Sa norme vaut $\sqrt{20^2 + 20^2} = 28 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$: le changement est bien réel.

5. Repère et coordonnées

Les constructions à la règle, c'est bien ; **calculer**, c'est mieux. Pour cela on introduit un **repère**.

Base orthonormée

Une **base orthonormée** du plan est formée de deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$:

- **orthogonaux** (perpendiculaires) ;
- **normés** : de norme 1 (ce sont des **vecteurs unitaires**).

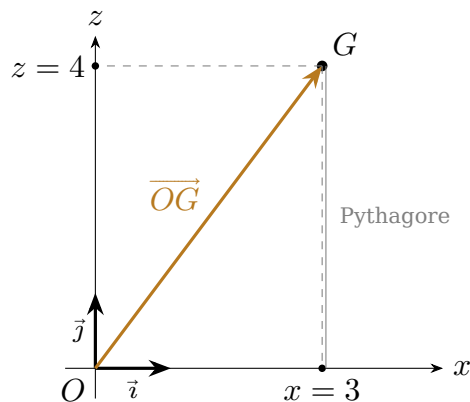
Associés à une origine O , ils forment le **repère** $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Tout vecteur se **décompose** alors de façon unique sur cette base (c'est encore Chasles) : il existe deux nombres x et z tels que

$$\overrightarrow{OG} = x \cdot \vec{i} + z \cdot \vec{j}.$$

Ces deux nombres sont les **coordonnées** du vecteur ; on les note en colonne : $\overrightarrow{OG} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$.

Géométriquement, x et z se lisent en **projetant** la pointe du vecteur sur chacun des axes.



$$\|\overrightarrow{OG}\| = \sqrt{x^2 + z^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Cap bac — l'indispensable

Tout se calcule sur les coordonnées. Si $\vec{u} \begin{pmatrix} u_x \\ u_z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} v_x \\ v_z \end{pmatrix}$, alors :

- somme : $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} u_x + v_x \\ u_z + v_z \end{pmatrix}$;
- opposé : $-\vec{u} \begin{pmatrix} -u_x \\ -u_z \end{pmatrix}$, et différence : $\vec{u} - \vec{v} \begin{pmatrix} u_x - v_x \\ u_z - v_z \end{pmatrix}$;

- multiplication : $k \cdot \vec{u} \begin{pmatrix} k u_x \\ k u_z \end{pmatrix}$;
- **norme** (Pythagore) : $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_x^2 + u_z^2}$.

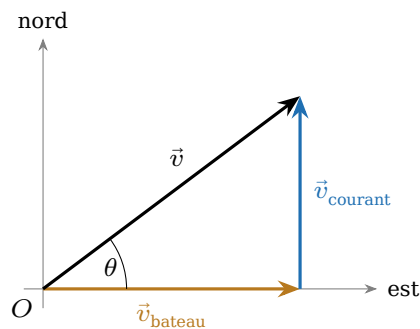
Autrement dit : on additionne, on soustrait et on multiplie **coordonnée par coordonnée**.

Exemple. Un bateau avance à $4,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ **vers l'est** ; le courant le porte à $3,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ **vers le nord**. Sa vitesse réelle est la **somme vectorielle** des deux. Prenons $\vec{i}$ vers l'est et $\vec{j}$ vers le nord : $\vec{v}_{\text{bateau}} \begin{pmatrix} 4,0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_{\text{courant}} \begin{pmatrix} 0 \\ 3,0 \end{pmatrix}$. La somme a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 4,0 \\ 3,0 \end{pmatrix}$, et sa norme vaut

$$v = \sqrt{4,0^2 + 3,0^2} = \sqrt{16 + 9} = 5,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1},$$

dans une direction intermédiaire (vers le nord-est). Plus précisément, cette direction fait avec l'est (axe Ox) un angle θ que donne la **tangente** :

$$\tan \theta = \frac{v_z}{v_x} = \frac{3,0}{4,0} = 0,75, \quad \theta = \arctan(0,75) \approx 37^\circ.$$



Le bateau ne va donc **ni** à $4,0$, **ni** à $7,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$: les **normes ne s'additionnent pas** — seuls les vecteurs s'additionnent.

6. Le produit scalaire

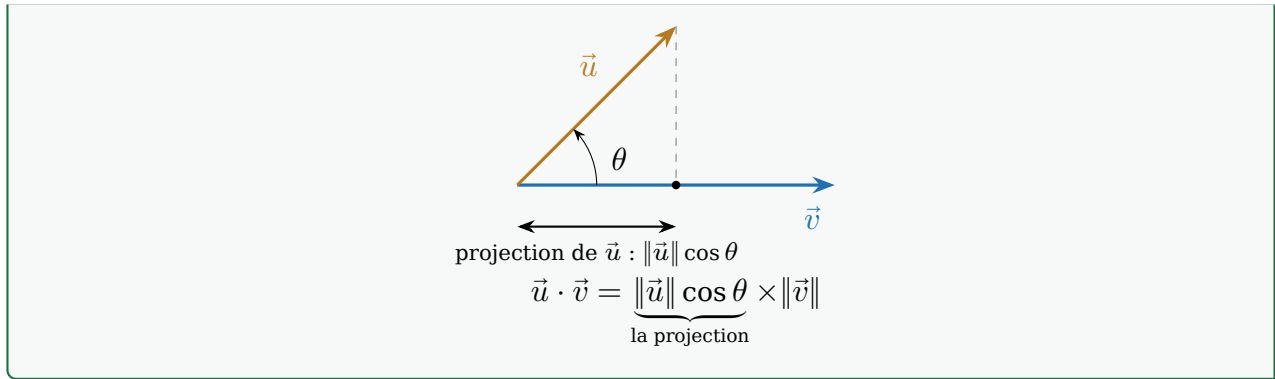
Voici l'opération qui manque : elle permet de **multiplier** deux vecteurs — mais, contrairement à tout ce qui précède, **son résultat est un nombre**, pas un vecteur. D'où son nom : produit *scalaire*.

Produit scalaire

Le **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le **nombre**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta,$$

où θ est l'angle entre les deux vecteurs (dessinés à partir d'une même origine).



Le produit scalaire réalise une projection. Le facteur $\|\vec{u}\| \cos \theta$ n'est autre que la **longueur de l'ombre** de $\vec{u}$ sur la direction de $\vec{v}$ (sa **projection**). Le produit scalaire mesure donc « ce que $\vec{u}$ fait **dans la direction de $\vec{v}$** », multiplié par la norme de $\vec{v}$. Trois cas à retenir :

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **perpendiculaires** ($\theta = 90^\circ$) : $\cos 90^\circ = 0$, donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. (*L'ombre est nulle : $\vec{u}$ ne fait rien dans la direction de $\vec{v}$.*)
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de **même sens** ($\theta = 0$) : $\cos 0 = 1$, donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ — c'est le **maximum**.
- angle **obtus** ($\theta > 90^\circ$) : $\cos \theta < 0$, le produit scalaire est **négatif**.

Exemple. Deux vecteurs de normes $\|\vec{u}\| = 5,0$ et $\|\vec{v}\| = 3,0$, formant un angle $\theta = 60^\circ$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 5,0 \times 3,0 \times \cos 60^\circ = 5,0 \times 3,0 \times 0,50 = 7,5.$$

Le résultat est un **nombre**, sans flèche.

En coordonnées, le calcul est encore plus simple.

Cap bac — l'indispensable

Si $\vec{u} \begin{pmatrix} u_x \\ u_z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} v_x \\ v_z \end{pmatrix}$ dans une base **orthonormée**, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_z v_z.$$

On multiplie les coordonnées deux à deux, et on additionne.

Exemple. $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 2 + 4 \times (-1) = 6 - 4 = 2$. Comme $\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0$, les deux vecteurs ne sont **pas** perpendiculaires. (*Un produit scalaire nul est d'ailleurs le test le plus rapide de perpendicularité : $\vec{i} \cdot \vec{j} = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$ — les vecteurs de base sont bien perpendiculaires.*)

6.1 Une coordonnée est un produit scalaire

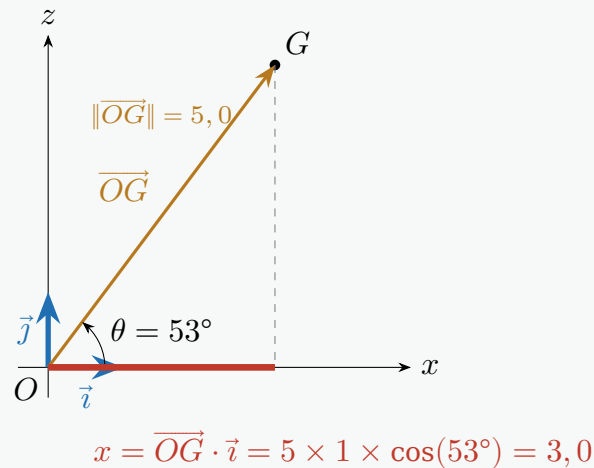
Projeter $\overrightarrow{OG}$ sur l'axe des x , c'est exactement calculer son produit scalaire avec le vecteur unitaire $\vec{i}$ qui **sous-tend** cet axe :

Coordonnées et projections

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les coordonnées d'un vecteur sont ses **produits scalaires avec les vecteurs de la base** :

$$x = \overrightarrow{OG} \cdot \vec{i} \quad \text{et} \quad z = \overrightarrow{OG} \cdot \vec{j}.$$

Une coordonnée est **une projection** et une projection n'est rien d'autre qu'un produit scalaire :



7. La convention des physiciens

Une dernière chose, purement pratique.

Cap bac — l'indispensable

En mathématiques, la norme se note $\|\vec{u}\|$. En physique, on l'écrit plus simplement **sans flèche** : la norme du vecteur $\vec{v}$ se note v , celle de $\vec{F}$ se note F .

$$v = \|\vec{v}\|$$

Une lettre avec flèche est un vecteur; la même lettre sans flèche est un nombre (sa norme). Écrire $\vec{v} = 5$ ou $v = \vec{v}$ n'a aucun sens : on écrit $v = 5,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ou $\|\vec{v}\| = 5,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Cap études supérieures

Et en trois dimensions ? Tout ce qui précède se transpose sans changement à l'espace : la base devient $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les vecteurs ont trois coordonnées, la norme s'écrit $\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$ et le produit scalaire $u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$. Au lycée, on reste presque toujours dans le plan.

Pièges fréquents

- **Confondre le vecteur et sa norme.** $\vec{v}$ est une flèche, v est un nombre. Une égalité entre un vecteur et un nombre est toujours fausse.
- **Croire qu'un vecteur est attaché à un point.** Deux flèches dessinées à deux endroits différents sont **le même vecteur** si elles ont même direction, sens et norme.
- **Additionner les normes.** $\|\vec{u} + \vec{v}\| \neq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ en général : le bateau du §5 va à $5,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, pas à $7,0$. Les normes ne s'additionnent que si les deux vecteurs ont **même direction et même sens**.
- **Confondre direction et sens.** Une direction (une droite) porte **deux** sens opposés.
- **Croire que le produit scalaire est un vecteur.** C'est un **nombre** — il peut d'ailleurs être **négatif** (angle obtus) ou **nul** (vecteurs perpendiculaires), ce qu'une norme ne peut jamais être.
- **Oublier que** $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_z v_z$ **suppose une base orthonormée** : c'est toujours le cas au lycée, mais la formule n'est pas magique, elle vient de $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$.

8. Auto-test

Répondez avant de regarder les corrigés.

1. Parmi ces grandeurs, lesquelles sont vectorielles : la masse, la vitesse, la température, la force, la durée ?
2. Deux flèches ont même direction, même sens et même norme, mais sont dessinées à deux endroits différents de la feuille. Représentent-elles le même vecteur ?
3. Un nageur avance à $1,2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ perpendiculairement à la berge ; le courant l'entraîne à $1,6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ le long de la berge. Quelle est la **norme** de sa vitesse réelle ?
4. On donne $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$. Les vecteurs sont-ils perpendiculaires ?
5. On donne $\overrightarrow{OG} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$. Calculer $\|\overrightarrow{OG}\|$, puis vérifier par le calcul que $\overrightarrow{OG} \cdot \vec{i}$ redonne bien la coordonnée x .
6. Deux vecteurs de normes $2,0$ et $5,0$ font entre eux un angle de 120° . Que vaut leur produit scalaire ? Le signe était-il prévisible ?

Corrigés

1. Sont **vectorielles** : la **vitesse** et la **force** (il faut préciser direction et sens). Sont scalaires : la masse, la température, la durée.
2. **Oui** : un vecteur n'est pas attaché à un point. Mêmes direction, sens et norme $\Rightarrow$ même vecteur.
3. Les deux vitesses sont perpendiculaires, donc (Pythagore) : $v = \sqrt{1,2^2 + 1,6^2} = \sqrt{1,44 + 2,56} = \sqrt{4,00} = 2,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.
4. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 2 + 4 \times (-1) = 2$. Comme $\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0$, ils ne sont **pas** perpendiculaires.

5. $\|\overrightarrow{OG}\| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$; et $\overrightarrow{OG} \cdot \vec{i} = 6 \times 1 + 8 \times 0 = 6$: on retrouve bien $x = 6$. (*Géométriquement : $\cos \theta = 6/10 = 0,60$ et $10 \times 1 \times 0,60 = 6$.*)
6. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2,0 \times 5,0 \times \cos 120^\circ = 2,0 \times 5,0 \times (-0,50) = -5,0$. Le signe **négalif** était prévisible : l'angle est **obtus** ($> 90^\circ$), donc $\cos \theta < 0$.