

La fonction sinusoïdale du temps

Une foule de grandeurs physiques **oscillent** au cours du temps : la tension délivrée par le secteur, la pression de l'air quand une note pure retentit, la position d'une masse suspendue à un ressort, la tension aux bornes d'un composant en régime alternatif. Toutes montent et descendent en se répétant, avec la même allure lisse et régulière. Le modèle mathématique de cette évolution est **la fonction sinusoïdale**.

1. Le modèle d'une grandeur qui oscille

Observons avec une interface d'acquisition une grandeur u qui varie périodiquement — par exemple une tension. La courbe monte, redescend, repasse par zéro, et recommence à l'identique. Le motif le plus simple qui fasse cela est celui de la fonction sinus, étiré verticalement (pour atteindre la bonne valeur maximale) et horizontalement (pour se répéter au bon rythme).

Grandeur sinusoïdale

Une grandeur u **varie de façon sinusoïdale** au cours du temps t lorsqu'elle s'écrit

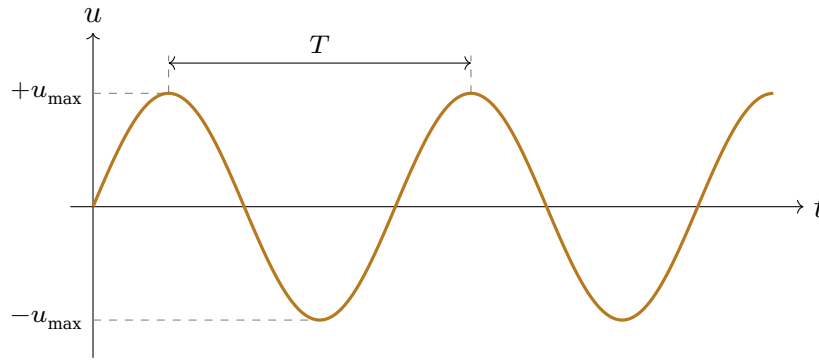
$$u(t) = u_{\max} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right),$$

où :

- $u_{\max}$ est l'**amplitude** : la valeur maximale atteinte par u (même unité que u) ; la grandeur oscille entre $+u_{\max}$ et $-u_{\max}$ puisque $\sin$ oscille entre $+1$ et -1 ;
- T est la **période** : la plus petite durée au bout de laquelle le motif se reproduit identique à lui-même (en s) ;
- la **fréquence** $f = \frac{1}{T}$ (en hertz, Hz) compte le nombre d'oscillations par seconde.

D'où vient le facteur $\frac{2\pi}{T}$? La fonction sinus effectue un tour complet — un motif entier — quand son argument augmente de 2π (fiche M7 : $\sin$ est 2π -périodique). On veut que u accomplisse ce tour pendant une durée T . Il faut donc que l'argument passe de 0 à 2π lorsque t passe de 0 à T : le coefficient devant t est $\frac{2\pi}{T}$. Comme $f = 1/T$, on peut aussi l'écrire $2\pi f$, et

$$u(t) = u_{\max} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) = u_{\max} \sin(2\pi f t).$$



Exemple. Une tension alternative d'amplitude $u_{\max} = 5,0 \text{ V}$ et de période $T = 20 \text{ ms}$ a pour fréquence $f = 1/T = 1/(20 \times 10^{-3}) = 50 \text{ Hz}$. Elle s'écrit $u(t) = 5,0 \sin\left(\frac{2\pi}{20 \times 10^{-3}} t\right)$ (t en s, u en V) — elle vaut 0 à $t = 0$, monte jusqu'à 5,0 V, redescend à $-5,0 \text{ V}$, et recommence toutes les 20 ms.

2. Vérification de la période T

Le nom « période » n'a de sens que si la fonction reprend **réellement** la même valeur après une durée T . Vérifions-le par le calcul : comparons $u(t+T)$ à $u(t)$.

Cap bac — l'indispensable

On remplace t par $t+T$ dans l'expression, et on développe :

$$u(t+T) = u_{\max} \sin\left(\frac{2\pi}{T}(t+T)\right) = u_{\max} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{T}T\right) = u_{\max} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + 2\pi\right).$$

Or ajouter 2π à l'argument d'un sinus ne change pas sa valeur ($\sin(x+2\pi) = \sin x$, fiche M7). Donc

$$u(t+T) = u_{\max} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = u(t).$$

La grandeur reprend la même valeur toutes les durées T : **T est bien la période.**

Le même calcul montre qu'aucune durée plus courte ne convient : entre 0 et T , l'argument $\frac{2\pi}{T}t$ ne balaie qu'un seul tour complet, et la fonction ne repasse par une valeur donnée *dans le même sens* qu'une seule fois. T est donc bien la **plus petite** durée de répétition.

3. Le décalage par rapport à l'origine : la phase φ

L'expression du §1 suppose que $u = 0$ (en montant) à l'instant $t = 0$. Mais l'instant $t = 0$ n'a rien de spécial : c'est simplement **l'instant où l'on déclenche le chronomètre**. Si on le déclenche un peu plus tôt ou un peu plus tard, la grandeur oscille exactement de la même façon, mais sa valeur de départ $u(0)$ change. Pour décrire une sinusoïde

qui ne part pas forcément de zéro, on ajoute un terme constant dans l'argument du sinus.

Phase à l'origine

La forme générale d'une grandeur sinusoïdale est

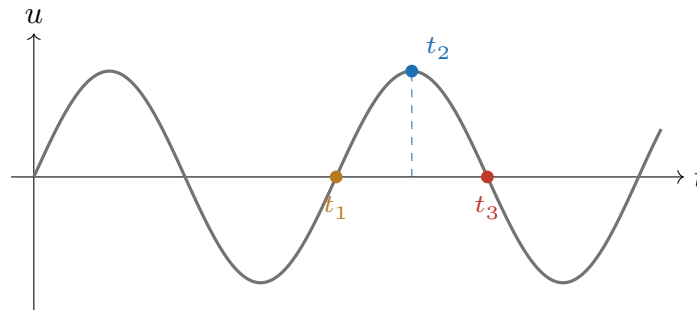
$$u(t) = u_{\max} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi\right),$$

où φ (lettre grecque « phi ») est la **phase à l'origine**, en radians. Elle fixe l'état de l'oscillation au moment où l'on déclenche le chronomètre : à $t = 0$,

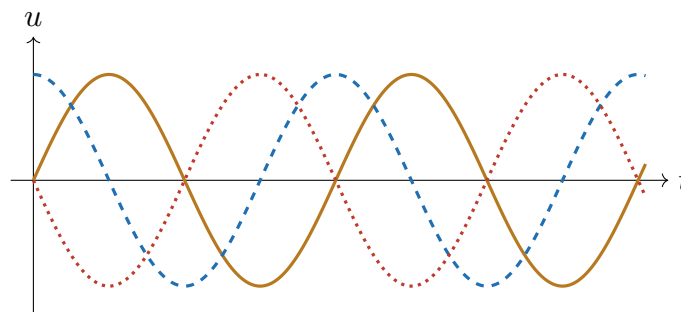
$$u(0) = u_{\max} \sin \varphi.$$

Amplitude $u_{\max}$, période T (donc fréquence $f = 1/T$) et phase φ **suffisent** à décrire complètement la sinusoïde.

Changer φ ne déforme pas la courbe : cela la **décale horizontalement**. Prenons **une seule** oscillation physique, et déclenchons trois chronomètres à trois instants différents t_1, t_2, t_3 :



Chaque chronomètre prend son instant de déclenchement comme **nouvelle origine des temps**. La même oscillation devient alors trois sinusoïdes de phases différentes, tracées dans un même repère — **mêmes couleurs et même code de trait que les instants ci-dessus** :



- chrono 1 : $\varphi = 0$
- - - chrono 2 : $\varphi = \pi/2$
- ... chrono 3 : $\varphi = \pi$

- **chrono 1** ($t_1, \varphi = 0$) : déclenché quand $u = 0$ **en montant** — à sa propre origine, $u = 0$ et **monte** (courbe de référence);
- **chrono 2** ($t_2, \varphi = \pi/2$) : déclenché au **maximum** — sa courbe **part du sommet** (c'est la courbe « en cosinus »);
- **chrono 3** ($t_3, \varphi = \pi$) : déclenché quand $u = 0$ **en descendant** — à sa propre origine, $u = 0$ et **descend**.

Une phase **positive** décale la courbe vers la **gauche** (l'oscillation est « en avance » : elle a déjà commencé son motif avant $t = 0$).

Cap bac — l'indispensable

Lire les paramètres de la sinusoïde sur un graphe $u(t)$:

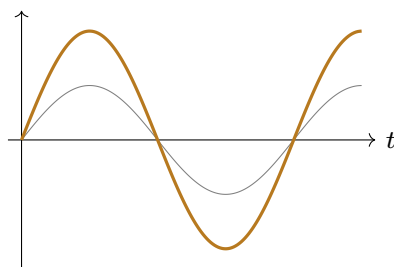
1. l'**amplitude** $u_{\max}$ se lit sur l'axe vertical (la valeur du sommet);
2. la **période** T se lit sur l'axe horizontal, entre deux points identiques consécutifs (deux maxima, ou deux passages par zéro **dans le même sens**); puis $f = 1/T$;

3. la **phase** φ se déduit de la valeur de départ : $u(0) = u_{\max} \sin \varphi$, en tenant compte du **sens** de variation à $t = 0$ (croissante $\Rightarrow (\sin \varphi)' = \cos \varphi > 0$; décroissante $\Rightarrow (\sin \varphi)' = \cos \varphi < 0$). Lire la phase à l'origine sur un enregistrement n'est pas demandé au bac.

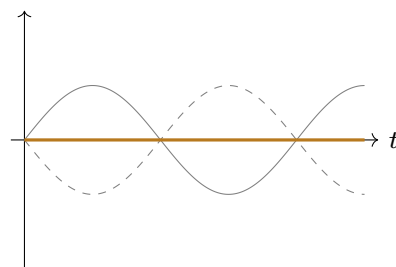
Exemple. Sur un enregistrement, à $t = 0$ la grandeur vaut la moitié de son maximum, $u(0) = u_{\max}/2$, et elle est **croissante**. Alors $\sin \varphi = 1/2$ avec $\cos \varphi > 0$, d'où $\varphi = \pi/6$ (et non $5\pi/6$, qui correspondrait à une grandeur décroissante).

4. Additionner deux sinusoïdes de même période

Quand deux grandeurs sinusoïdales de **même période** se superposent en un même point, elles s'ajoutent instant par instant : $S(t) = s_1(t) + s_2(t)$. Le résultat est encore une sinusoïde de même période, mais son amplitude dépend **entièrement du décalage de phase** φ entre les deux.



en phase ($\varphi = 0$)
 $S = s_1 + s_2$: amplitude doublée



opposition de phase ($\varphi = \pi$)
 $S = 0$: annulation

Deux cas extrêmes sont à retenir (mêmes amplitudes) :

- **en phase** ($\varphi = 0$) : les deux courbes montent et descendent ensemble, elles se **renforcent** — l'amplitude de la somme est **doublée**;

- **en opposition de phase** ($\varphi = \pi$) : quand l'une monte, l'autre descend d'autant, elles se **compensent** à chaque instant — la somme est **nulle**.

Pour un décalage intermédiaire, l'amplitude de la somme se situe entre ces deux extrêmes (0 et $2 \times$ l'amplitude). (*Le calcul exact de cette amplitude relève des formules d'addition de la trigonométrie et n'est pas exigible.*)

Exemple. C'est le principe du **casque antibruit** : un micro capte le bruit ambiant, et le casque émet un « anti-son » de même amplitude en opposition de phase. Les deux ondes s'ajoutent en opposition et s'annulent — l'oreille reçoit le silence.

Pièges fréquents

- **Confondre amplitude et valeur à un instant donné.** $u_{\max}$ est le sommet de la courbe ; $u(t)$ prend toutes les valeurs entre $-u_{\max}$ et $+u_{\max}$.
- **Oublier le facteur 2π .** L'argument du sinus est $\frac{2\pi}{T}t$ (ou $2\pi f t$), pas $\frac{t}{T}$: sans le 2π , la fonction ne boucle pas en une période.
- **Travailler en degrés.** L'argument du sinus (donc la phase φ) est en **radians** ; en fin de motif, l'argument vaut 2π , pas 360.
- **Lire T entre deux zéros voisins.** Deux passages par zéro consécutifs sont séparés d'une **demi-période** : pour lire T , prendre deux points identiques *dans le même sens* de variation.
- **Croire qu'une phase déforme la courbe.** φ ne fait que **décaler** la sinusoïde le long de l'axe des temps ; amplitude et période sont inchangées.

5. Auto-test

Répondez avant de regarder les corrigés.

1. Une tension sinusoïdale a pour amplitude $u_{\max} = 3,0$ V et pour période $T = 4,0$ ms. Donner sa fréquence, puis écrire $u(t)$ (sans déphasage).
2. En calculant $u(t + T)$, montrer que u reprend la même valeur toutes les durées T . On rappelle que $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.
3. À $t = 0$, une grandeur sinusoïdale passe par 0 **en descendant**. Parmi $\varphi = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$, laquelle est sa phase à l'origine ?
4. Deux sons sinusoïdaux de même fréquence et de même amplitude se superposent en opposition de phase. Que vaut l'amplitude du son résultant ?
5. Sur un graphe, une grandeur atteint $+2,0$ et $-2,0$; deux maxima successifs sont lus à $t = 1,0$ s et $t = 5,0$ s. Donner $u_{\max}$, T et f .

Corrigés

1. $f = 1/T = 1/(4,0 \times 10^{-3}) = 2,5 \times 10^2$ Hz (250 Hz). Expression : $u(t) = 3,0 \sin\left(\frac{2\pi}{4,0 \times 10^{-3}} t\right)$ (t en s, u en V).

2. On remplace t par $t + T$ dans l'expression :

$$u(t+T) = u_{\max} \sin\left(\frac{2\pi}{T}(t+T)\right) = u_{\max} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + 2\pi\right) = u_{\max} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = u(t),$$

car $\sin(x + 2\pi) = \sin x$: la valeur se reproduit toutes les durées T .

3. $u(0) = u_{\max} \sin \varphi = 0$ impose $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$; la grandeur **descend** à $t = 0$ ($\cos \varphi < 0$), donc $\varphi = \pi$.
4. Amplitudes égales en opposition de phase : les deux signaux se compensent à chaque instant, l'amplitude résultante est **nulle** (silence).
5. $u_{\max} = 2,0$; $T = 5,0 - 1,0 = 4,0$ s (entre deux maxima) ; $f = 1/T = 0,25$ Hz.