

Trigonométrie et petits angles

Mesurer un angle et une longueur, puis en déduire une autre longueur — c'est le service que la trigonométrie rend sans cesse à la physique. Cette fiche rassemble le minimum vital : les trois rapports dans le triangle rectangle, le radian, et l'approximation qui simplifie tout quand l'angle est petit.

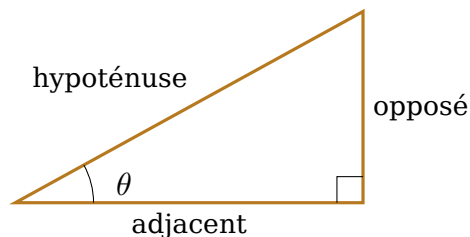
1. Dans le triangle rectangle

Sinus, cosinus et tangente

Dans un triangle rectangle, pour un angle aigu θ :

$$\sin \theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}, \quad \cos \theta = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}, \quad \tan \theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}.$$

L'**hypoténuse** est le côté le plus long, face à l'angle droit ; l'opposé et l'adjacent se repèrent **par rapport à** θ . On retient aussi $\tan \theta = \sin \theta / \cos \theta$.



Exemple. Un triangle rectangle de côtés 3, 4 et 5 (l'hypoténuse) : pour l'angle θ opposé au côté 3, $\sin \theta = 3/5 = 0,60$, $\cos \theta = 4/5 = 0,80$, $\tan \theta = 3/4 = 0,75$.

Pour **retrouver l'angle** à partir d'un rapport, la calculatrice fournit les fonctions réciproques arcsin, arccos et arctan respectivement notées $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, et $\tan^{-1}$ (touches « seconde fonction »).

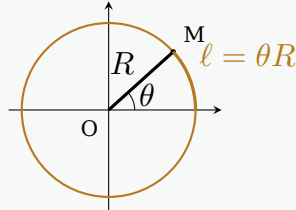
Exemple. Avec $\tan \theta = 0,75$: $\theta = \arctan(0,75) = 37^\circ$. Attention : la calculatrice doit être en mode *degré* pour ce calcul.

2. Le radian et le cercle trigonométrique

Le degré est une unité de commodité ; l'unité **naturelle** des angles — celle du Système international, et la seule qui rende vraie l'approximation du §3 — est le radian.

Radian

Sur un cercle de rayon R , un angle au centre θ intercepte un arc de longueur $\ell = \theta \cdot R$.



Un **radian** (rad) est l'angle qui intercepte un arc de longueur égale au rayon. Un demi-tour vaut $180^\circ = \pi$ rad, d'où la conversion :

$$\theta_{\text{rad}} = \theta_{\text{deg}} \cdot \frac{\pi}{180}$$

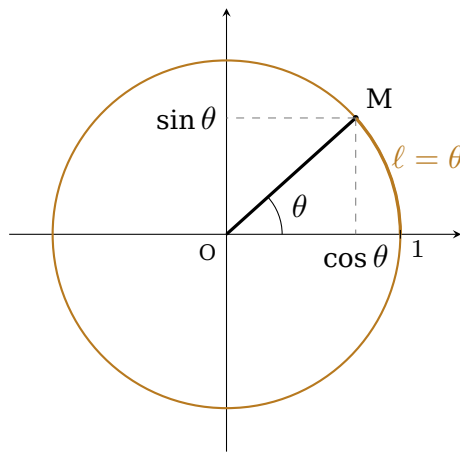
Exemple. $30^\circ = 30 \times \pi / 180 = 0,52$ rad ; en sens inverse, $0,30$ rad $= 0,30 \times 180 / \pi = 17^\circ$.

La calculatrice possède un **mode degrés** et un **mode radians** : le réflexe, avant tout calcul trigonométrique, est de vérifier lequel est actif — c'est la première cause d'erreur en physique.

La relation $\ell = \theta \cdot R$ dit au passage ce qu'est vraiment un angle en radians : $\theta = \ell / R$, le **rapport de deux longueurs**. Un angle est donc un **nombre sans unité** — le « rad » n'est pas une unité au sens des équations aux dimensions, seulement le rappel de la convention de mesure. C'est ce qui autorisera à écrire qu'un angle vaut 0,030 tout court (§3).

Exemple. Un arc de 3,0 cm sur un cercle de rayon 6,0 cm : $\theta = \ell / R = 3,0 / 6,0 = 0,50$ — les centimètres se sont simplifiés, il reste un nombre, que l'on étiquette « 0,50 rad ».

Sur le **cercle trigonométrique** (rayon 1 sans unité, centré à l'origine), un point M repéré par l'angle θ a pour coordonnées $(\cos \theta ; \sin \theta)$ — et l'arc ℓ parcouru depuis l'axe horizontal mesure exactement θ :



3. L'approximation des petits angles

Lorsqu'un angle est petit ($\theta \ll \pi$), on peut montrer qu'une approximation utile est valide :

Approximation des petits angles

Pour un petit angle **exprimé en radians** :

$$\sin \theta \simeq \tan \theta \simeq \theta \quad \text{et} \quad \cos \theta \simeq 1.$$

Nous ne le démontrerons pas en terminale mais, plutôt que de l'admettre, **constatez-la à la calculatrice** (mode radians !) :

θ (rad)	0,5	0,2	0,1	0,05	0,01
$\sin \theta$	0,479	0,199	0,0998	0,0500	0,0100
$\tan \theta$	0,546	0,203	0,1003	0,0500	0,0100

À 0,5 rad (29°), l'écart se voit ; à 0,1 rad ($5,7^\circ$), il est déjà inférieur à 0,4 % ; à 0,01 rad, il a disparu des quatre chiffres affichés. En pratique, l'approximation est valable avec une précision de 1% pour $\theta < 10^\circ \simeq 0,17$ rad.

Exemple. Sous quel angle voit-on une tour de 300 m de haut à 10 km de distance ? L'angle exact est $\theta = \arctan(300/10\,000)$; comme $300/10\,000 = 0,030 < 0,17$, on écrit directement $\theta = 0,030$ rad ($1,7^\circ$) — sans toucher à la touche $\tan^{-1}$.

Cap études supérieures

Dans le supérieur, ces approximations apparaissent comme les premiers termes des **développements limités** ($\sin \theta = \theta - \theta^3/6 + \dots$) — un outil hors programme au bac : la table de valeurs ci-dessus suffit.

Pièges fréquents

- **Le mode de la calculatrice** : degrés ou radians ? À vérifier avant tout calcul — et l'approximation $\sin \theta \simeq \theta$ n'a de sens **qu'en radians** ($\sin 5^\circ \neq 5$!).
- **Opposé et adjacent se définissent par rapport à l'angle choisi** : changer d'angle aigu échange les deux (et transforme $\sin$ en $\cos$).
- arcsin est la **réciproque** du sinus, pas son inverse $1/\sin$.
- Ne pas extrapoler : $\cos \theta \simeq 1$ pour un petit angle, et surtout pas $\cos \theta \simeq \theta$.
- Un angle « petit » s'apprécie en radians : $10^\circ = 0,17$ rad passe encore, $30^\circ = 0,52$ rad non.

4. Auto-test

Répondez avant de regarder les corrigés.

1. Un triangle rectangle a une hypoténuse de 13 cm et un côté de 5 cm. Donner $\sin \theta$, $\cos \theta$ et $\tan \theta$ pour l'angle θ opposé à ce côté, puis θ en degrés.
2. Convertir 45° et $2,0^\circ$ en radians, puis 0,30 rad en degrés.
3. À la calculatrice (mode radians), comparer $\sin(0,10)$ et $\tan(0,10)$ à 0,10. L'approximation est-elle justifiée ?
4. Du pied d'une colline, on voit le sommet d'un immeuble distant de 40 m sous un angle de 15° au-dessus de l'horizontale. Calculer sa hauteur. Peut-on utiliser l'approximation des petits angles ?
5. Quel angle (en rad puis en degrés) sous-tend un immeuble de 30 m de haut vu à 1,0 km ?

Corrigés

1. Le troisième côté vaut $\sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ cm (triangle 5-12-13). D'où $\sin \theta = 5/13 = 0,38$, $\cos \theta = 12/13 = 0,92$, $\tan \theta = 5/12 = 0,42$, et $\theta = \arcsin(5/13) = 23^\circ$.
2. $45^\circ = 45 \times \pi/180 = 0,79$ rad ($= \pi/4$); $2,0^\circ = 0,035$ rad; $0,30$ rad $= 0,30 \times 180/\pi = 17^\circ$.
3. $\sin(0,10) = 0,0998$ et $\tan(0,10) = 0,1003$: les deux valent 0,10 à mieux que 0,4 % — approximation justifiée ($0,10 < 0,17$ rad).
4. $h = d \cdot \tan \theta = 40 \times \tan 15^\circ = 11$ m. Ici $15^\circ = 0,26$ rad $> 0,17$ rad : l'approximation commencerait à fausser le résultat ($40 \times 0,26 = 10,5$ m, écart ~ 2 %) — on garde la tangente exacte.
5. $30/1000 = 0,030 \ll 0,17$: l'angle vaut directement $\theta = 0,030$ rad $= 1,7^\circ$.