

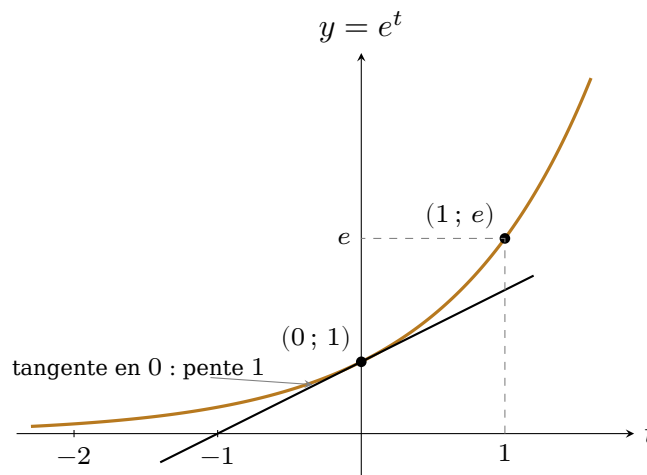
La fonction exponentielle

1. Définition

Fonction exponentielle

La **fonction exponentielle** $t \mapsto \exp(x)$ est l'unique fonction égale à sa propre dérivée et valant 1 en 0. On note $e = \exp(1) = 2,718 \dots$ et on démontre que $\exp(x)$ se comporte comme une **puissance de e** :

$$\exp(x) = e^x.$$



La courbe est **toujours strictement positive** (une exponentielle ne s'annule jamais), **strictement croissante**, écrasée sur l'axe à gauche (asymptote pour $x \rightarrow -\infty$) et d'une croissance explosive à droite.

2. Les propriétés algébriques

Puissance de e , l'exponentielle obéit aux règles usuelles des puissances (les mêmes que pour 10^x , fiche M1) — pour tous réels a et b :

Cap bac — l'indispensable

$$e^a \cdot e^b = e^{a+b}, \quad e^0 = 1, \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a}, \quad \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}, \quad (e^a)^n = e^{n \cdot a}.$$

Exemple. $e^3 \cdot e^{-1} = e^2 = 7,4$; et $e^{-0,5} \cdot e^{-0,5} = e^{-1} = \frac{1}{e} = 0,37$.

3. Dériver e^u

Cap bac — l'indispensable

$$(e^u)' = u' e^u$$

Dans le cas simple important où $u = ax$ avec a une constante :

$$(e^{ax})' = a e^{ax}$$

Exemple. $f(x) = 5,0 \cdot e^{-0,50x}$ a pour dérivée $f'(x) = -0,50 \times 5,0 \cdot e^{-0,50x} = -2,5 \cdot e^{-0,50x}$: négative à chaque instant (f décroît), et de valeur $-2,5$ à $x = 0$.

4. La décroissance exponentielle $e^{-t/\tau}$

Le visage le plus fréquent de l'exponentielle en physique-chimie est la **décroissance** d'une grandeur A fonction du temps depuis sa valeur initiale A_0 :

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-t/\tau}$$

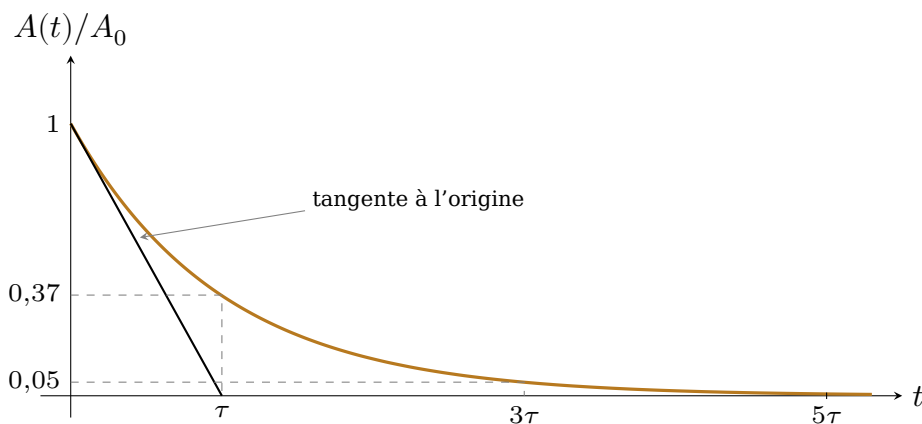
L'argument de l'exponentielle, $-t/\tau$, est **sans dimension** — comme celui d'un logarithme : la constante τ est donc **homogène à un temps** (en secondes si t est en secondes).

Temps caractéristique d'une décroissance

La constante τ est appelée le **temps caractéristique** de la décroissance : il fixe l'échelle de temps du phénomène.

La dérivée de la fonction A s'écrit d'après le paragraphe précédent :

$$\frac{dA}{dt} = A_0 \frac{d}{dt}(e^{-t/\tau}) = -\frac{A_0}{\tau} e^{-t/\tau} = -\frac{1}{\tau} A.$$



Trois repères à mémoriser, qui suffisent à esquisser n'importe quelle décroissance exponentielle :

date	$t = \tau$	$t = 3\tau$	$t = 5\tau$
il reste	$e^{-1} = 37 \%$	$e^{-3} = 5,0 \%$	$e^{-5} = 0,7 \%$

La courbe tend vers zéro **sans jamais l'atteindre** (asymptote) : l'état final est un état limite, et c'est précisément pour cela qu'on décrit la durée du phénomène par τ (au bout de quelques τ , tout est fini en pratique).

Cap bac — l'indispensable

Déterminer τ sur une courbe de décroissance — deux lectures équivalentes :

1. **Tangente à l'origine** : elle coupe l'axe des abscisses en $t = \tau$ (sa pente vaut $-A_0/\tau$);
2. **Niveau 37 %** : repérer la date à laquelle il ne reste que 37 % de la valeur initiale.

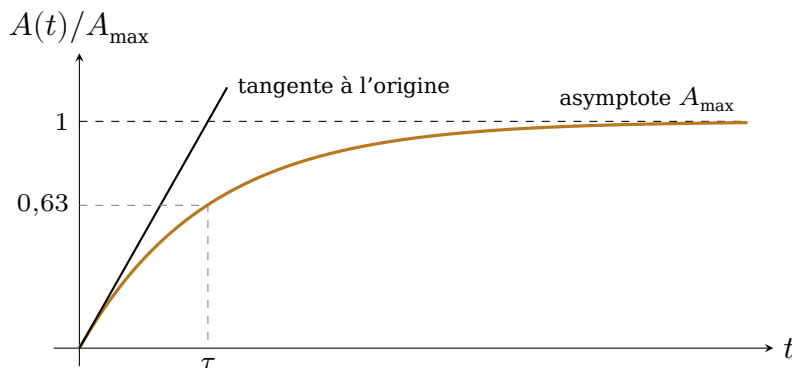
Faire les deux : si elles ne donnent pas la même valeur, l'une des lectures est fautive — ou la décroissance n'est pas exponentielle.

Exemple. Une grandeur décroît depuis $A_0 = 8,0$ (unités arbitraires); la tangente à l'origine coupe l'axe des temps à $t = 25$ s, et la courbe passe par $A = 3,0 \simeq 0,37 \times 8,0$ à $t = 25$ s : les deux lectures concordent, $\tau = 25$ s.

L'autre visage : la montée à saturation

Beaucoup de phénomènes **montent** vers un palier $A_{\max}$ en suivant la courbe « miroir » :

$$A(t) = A_{\max} (1 - e^{-t/\tau}).$$



Les lectures de τ se transposent : la tangente à l'origine atteint l'**asymptote** en $t = \tau$, et à cette date la grandeur a accompli 63 % de sa montée ($1 - e^{-1} = 0,63$).

5. Inverser l'exponentielle : le logarithme népérien

Lire une courbe donne τ ; mais pour extraire une **date** d'une équation du type $e^{-t/\tau} = 0,5$, il faut pouvoir « défaire » l'exponentielle — extraire t de l'exponentielle comme on extrait la concentration en oxonium de la formule du pH.

Logarithme népérien

Le **logarithme népérien** $\ln$ est la fonction réciproque de l'exponentielle : pour $y > 0$,

$$\ln y = x \iff y = e^x, \quad \text{d'où} \quad \ln(e^x) = x$$

Il vérifie les mêmes règles que $\log$ ($\ln(ab) = \ln a + \ln b \dots$). Une valeur revient sans cesse : $\ln 2 \simeq 0,69$.

Exemple. Au bout de combien de temps une décroissance exponentielle a-t-elle perdu la **moitié** de sa valeur ? On cherche $t_{1/2}$ tel que $e^{-t_{1/2}/\tau} = 0,5$, soit $-t_{1/2}/\tau = \ln(0,5) = -\ln 2$:

$$t_{1/2} = \tau \cdot \ln 2 = 0,69 \tau.$$

Avec $\tau = 25$ s : $t_{1/2} = 0,69 \times 25 = 17$ s. Ce « temps de demi-vie » est **le même à chaque étape** : de A_0 à $A_0/2$, de $A_0/2$ à $A_0/4 \dots$ la décroissance exponentielle divise par deux à intervalle de temps constant.

Pièges fréquents

- **L'argument d'une exponentielle est sans dimension** : on écrit $e^{-t/\tau}$, jamais e^{-t} avec t en secondes. Si l'argument a une unité, une erreur s'est glissée en amont.
- τ **n'est pas** $t_{1/2}$: à $t = \tau$ il reste 37 % (et non 50 %). Le lien est $t_{1/2} = \tau \cdot \ln 2 = 0,69 \tau$.
- Une exponentielle décroissante **ne s'annule jamais** : ne pas chercher « la date où $A = 0$ » — on raisonne en fractions de A_0 et en nombre de τ .
- Ne pas confondre $\ln$ (réciproque de e^x) et $\log$ (réciproque de 10^x , fiche M1) : la calculatrice a une touche pour chacun.

Cap études supérieures

D'où sort le nombre e ? La construction du nombre s'écrit formellement $e = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N$, et on démontre aussi que $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = 2,718\,281\,8\dots$, un nombre irrationnel. Dans le supérieur, l'exponentielle se définit par cette série, et son rôle central vient de ce qu'elle résout les **équations différentielles linéaires** : chercher une fonction dont la dérivée est proportionnelle à la fonction, c'est chercher une exponentielle. On y reviendra, méthode de résolution comprise, dans les chapitres d'évolutions temporelles.

6. Auto-test

Répondez avant de regarder les corrigés.

1. Simplifier $e^3 \cdot e^{-1}$, puis donner sa valeur numérique.

2. Une grandeur suit $A(t) = A_0 \cdot e^{-t/\tau}$ avec $\tau = 20$ s. Quelle fraction de A_0 reste-t-il à $t = 20$ s ? à $t = 60$ s ?
3. Dériver $f(t) = 5,0 \cdot e^{-t/2,0}$ (t en s). Que vaut $f'(0)$?
4. Sur une courbe de décroissance exponentielle, la tangente à l'origine coupe l'axe des temps à $t = 4,0$ s. Donner τ , puis le temps de demi-vie $t_{1/2}$.
5. Résoudre $e^{-t/\tau} = 0,10$: au bout de combien de τ ne reste-t-il que 10 % de la valeur initiale ?

Corrigés

1. $e^3 \cdot e^{-1} = e^{3-1} = e^2 = 7,4$.
2. À $t = 20$ s $= \tau$: $e^{-1} = 0,37$, soit 37 % de A_0 . À $t = 60$ s $= 3\tau$: $e^{-3} = 0,050$, soit 5,0 %.
3. Ici $a = -1/2,0 = -0,50$ s⁻¹, donc $f'(t) = -0,50 \times 5,0 \cdot e^{-t/2,0} = -2,5 \cdot e^{-t/2,0}$, et $f'(0) = -2,5$ (en unités de f par seconde).
4. La tangente à l'origine coupe l'axe des abscisses en $t = \tau$, donc $\tau = 4,0$ s ; $t_{1/2} = \tau \cdot \ln 2 = 0,69 \times 4,0 = 2,8$ s.
5. $-t/\tau = \ln(0,10) = -\ln 10$, donc $t = \tau \cdot \ln 10 = 2,3\tau$: au bout d'environ 2,3 temps caractéristiques.