

Résoudre une équation du second degré

En chimie (état final d'une transformation limitée) comme en physique (durée d'une chute, trajectoire), les calculs aboutissent souvent à une équation où l'inconnue apparaît **au carré**. Cette fiche donne la méthode pour la résoudre — numériquement — et pour choisir, entre les deux solutions mathématiques, celle qui décrit la réalité.

1. Mettre l'équation sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$

Équation du second degré

Une **équation du second degré** d'inconnue x est une équation qui peut se mettre sous la forme

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0),$$

où a , b et c sont des nombres connus (les **coefficients**).

Le travail se fait **en littéral** : on développe, on fait tout passer du même côté, on ordonne selon les puissances de x — puis on identifie a , b et c .

Exemple. En chimie, l'état final d'une transformation limitée conduit à des équations du type

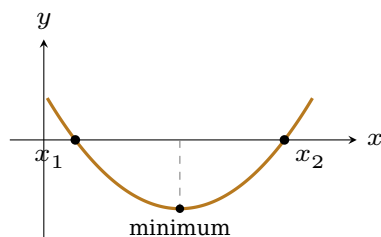
$$K = \frac{x^2}{c - x} \quad (K \text{ et } c \text{ connus}).$$

On multiplie par $(c - x)$: $K \cdot (c - x) = x^2$, puis on ordonne :

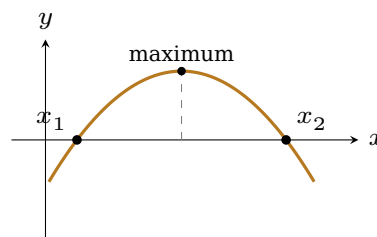
$$x^2 + Kx - Kc = 0,$$

soit $a = 1$, $b = K$ et $c_{\text{coef}} = -Kc$ (attention à ne pas confondre le coefficient c_{coef} avec la concentration c de l'énoncé — renommer si besoin).

Ce que l'on trace. À l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est associée la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$, dont la courbe représentative est une **parabole**. Résoudre l'équation, c'est chercher les abscisses des points où cette parabole **coupe l'axe des abscisses** — les valeurs de x pour lesquelles y vaut 0.



$a > 0$: branches vers le **haut**



$a < 0$: branches vers le **bas**

Le sens d'incurvation ne dépend que du signe de a . Si $a > 0$, les branches sont tournées **vers le haut** : la courbe descend, passe par un **minimum**, puis remonte. Si $a < 0$, elles sont tournées **vers le bas** : la courbe monte, passe par un **maximum**, puis redescend. Les coefficients b et c ne font que déplacer la parabole — c est l'ordonnée du point où elle coupe l'axe des ordonnées, puisque $y = c$ pour $x = 0$ — sans jamais changer ce sens.

2. Résoudre numériquement

Une fois a, b, c identifiés, on remplace par leurs **valeurs numériques** et on calcule.

Cap bac — l'indispensable

1. Calculer le **discriminant** :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

2. Si $\Delta > 0$, l'équation a **deux solutions** :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

(Si $\Delta = 0$: une seule, $x = -b/(2a)$; si $\Delta < 0$: aucune solution réelle — en pratique, un signe s'est probablement glissé dans la mise en forme.)

3. Garder les valeurs **non arrondies** (mémoire de la calculatrice) jusqu'au résultat final.

La plupart des calculatrices ont aussi un **solveur d'équations polynomiales** qui donne directement x_1 et x_2 — vérifier l'ordre de grandeur reste indispensable.

Exemple. $x^2 + 1,7 \times 10^{-5}x - 1,7 \times 10^{-7} = 0$:

$$\Delta = (1,7 \times 10^{-5})^2 + 4 \times 1,7 \times 10^{-7} = 6,8 \times 10^{-7},$$

d'où $\sqrt{\Delta} = 8,25 \times 10^{-4}$ et

$$x_1 = \frac{-1,7 \times 10^{-5} - 8,25 \times 10^{-4}}{2} = -4,2 \times 10^{-4}$$

$$x_2 = \frac{-1,7 \times 10^{-5} + 8,25 \times 10^{-4}}{2} = 4,0 \times 10^{-4}.$$

3. Choisir la solution physique

L'équation mathématique a deux solutions ; la situation étudiée n'en a généralement qu'**une**. On ne choisit pas au hasard, ni « la positive » par réflexe :

Cap bac — l'indispensable

Confronter **chacune** des deux solutions aux **contraintes physiques** de la situation, et garder celle(s) qui les respectent :

- un **avancement** vérifie $0 \leq x \leq x_{\max}$;
- une **concentration**, une **masse**, une **durée de réaction** sont positives ;
- une **date**, une **position**, une **température** en °C... peuvent être négatives : le signe seul n'élimine rien ;
- il arrive que les **deux** solutions soient physiquement acceptables — c'est alors l'énoncé qui départage (« à la montée », « la première fois que »...).

Exemple (suite). Si x désigne la concentration d'un produit formé à partir d'une concentration apportée $c = 1,0 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, alors x ne peut ni être négative, ni dépasser c : $x_1 < 0$ est à rejeter, et $x_2 = 4,0 \times 10^{-4}$ vérifie bien $0 \leq x_2 \leq c$ — c'est la solution physique.

Exemple. Une balle lancée vers le haut passe à une hauteur donnée à **deux** instants $t_1 = 0,37 \text{ s}$ et $t_2 = 1,7 \text{ s}$: deux solutions **toutes deux positives** et toutes deux réelles physiquement — l'une à la montée, l'autre à la descente. C'est la question posée qui désigne la bonne.

Pièges fréquents

- **Ne pas éliminer machinalement « la racine négative »** : les deux solutions peuvent être positives, et une grandeur algébrique (date, position...) peut être négative. Le tri se fait sur les **contraintes physiques**, jamais sur le seul signe.
- Les **erreurs de signe** se produisent presque toujours à la mise sous forme $ax^2 + bx + c = 0$: ordonner soigneusement, en littéral, avant tout calcul.
- Ne pas confondre les **coefficients** a, b, c avec les grandeurs de l'énoncé qui portent les mêmes lettres (concentration c ...) : renommer.
- $\Delta < 0$ dans un problème de physique-chimie signale presque toujours une **erreur en amont**, pas une absence de solution.

Cap études supérieures

La résolution littérale. Dans le supérieur, on garde les lettres jusqu'au bout : les solutions s'écrivent

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

ce qui permet de **discuter** le résultat en fonction des paramètres (signe, comportement limite, condition d'existence $b^2 \geq 4ac$). On retiendra aussi que la somme et le produit des solutions valent $x_1 + x_2 = -b/a$ et $x_1 x_2 = c/a$ — un moyen rapide de vérifier ses calculs.

4. Auto-test

Répondez avant de regarder les corrigés.

1. Mettre sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ l'équation $\frac{x^2}{0,010 - x} = 2,5 \times 10^{-3}$ et identifier les coefficients.
2. Résoudre numériquement l'équation obtenue.
3. Laquelle des solutions est physique, si x est une concentration formée à partir d'une concentration apportée de $0,010 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$?
4. La hauteur d'un ballon vérifie $4,9t^2 - 10t + 3 = 0$ (en secondes). Résoudre, puis interpréter les deux solutions.

Corrigés

1. $x^2 = 2,5 \times 10^{-3} (0,010 - x)$, d'où $x^2 + 2,5 \times 10^{-3} x - 2,5 \times 10^{-5} = 0$: $a = 1$; $b = 2,5 \times 10^{-3}$; $c = -2,5 \times 10^{-5}$.
2. $\Delta = (2,5 \times 10^{-3})^2 + 4 \times 2,5 \times 10^{-5} = 1,06 \times 10^{-4}$; $\sqrt{\Delta} = 1,03 \times 10^{-2}$; $x_1 = -6,4 \times 10^{-3}$ et $x_2 = 3,9 \times 10^{-3}$.
3. $x_1 < 0$: impossible pour une concentration ; $x_2 = 3,9 \times 10^{-3}$ vérifie $0 \leq x_2 \leq 0,010$: c'est la solution physique.
4. $\Delta = 100 - 4 \times 4,9 \times 3 = 41,2$; $t_1 = 0,37 \text{ s}$ et $t_2 = 1,7 \text{ s}$. **Les deux sont physiques** : le ballon passe à cette hauteur une première fois en montant (t_1), une seconde fois en redescendant (t_2).