

La fonction logarithme décimal

Plusieurs chapitres mesurent des grandeurs qui varient sur des **domaines gigantesques** (la concentration en ions oxonium, l'intensité d'un son...). Pour les manier, on les comprime avec une fonction : le **logarithme décimal** $\log$.

1. Des puissances entières aux puissances décimales

On sait élever 10 à une puissance **entière** : $10^2 = 100$, $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0,001$. On peut aussi l'élever à une puissance **non entière**.

Par exemple, pour un réel $a > 0$, la puissance $a^{1/2}$ est définie comme la **racine carrée** :

$$a^{1/2} = \sqrt{a} \quad \text{car} \quad (a^{1/2})^2 = a^1 = a.$$

Plus généralement, $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$, et toute puissance réelle a^x a un sens.

Ainsi $10^{0,5} = \sqrt{10} \simeq 3,16$, et $10^{2,5} = 10^2 \times 10^{0,5} = 100\sqrt{10} \simeq 316$.

Conséquence. La fonction $x \mapsto 10^x$ est définie pour **tout réel** x . Elle est **continue, strictement croissante**, et ne prend que des valeurs **strictement positives** : elle va de $\mathbb{R}$ vers $]0; +\infty[$.

2. Définition : la réciproque de 10^x

Puisque $x \mapsto 10^x$ est strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0; +\infty[$, elle réalise une **bijection** : tout nombre strictement positif s'écrit de façon unique 10^x . On peut donc « remonter » de la valeur à l'exposant — c'est ce que fait le logarithme décimal.

Logarithme décimal

Le **logarithme décimal** d'un réel $x > 0$, noté $\log x$, est l'**unique exposant** auquel il faut élever 10 pour obtenir x :

$$y = \log x \quad \Longleftrightarrow \quad x = 10^y.$$

$\log$ est donc la **fonction réciproque** de 10^x :

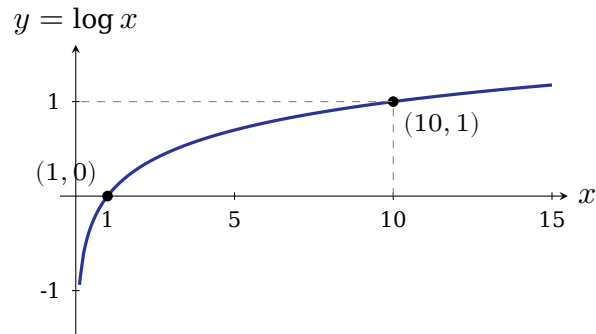
$$\log(10^a) = a \quad \text{et} \quad 10^{\log x} = x.$$

Quelques valeurs immédiates :

$$\log 1 = \log(10^0) = 0, \log 10 = \log(10^1) = 1, \log(10^n) = n, \log(0,001) = \log(10^{-3}) = -3.$$

3. Variations et limites

Réciproque d'une fonction strictement croissante, $\log$ est elle-même **strictement croissante** sur $]0; +\infty[$. Sa croissance est **lente**.



Le graphe passe par $(1, 0)$ et $(10, 1)$, et plonge vers $-\infty$ près de 0. Aux bornes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty.$$

4. La propriété fondamentale : produit $\rightarrow$ somme

Logarithme d'un produit

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b.$$

Démonstration. Posons $\alpha = \log a$ et $\beta = \log b$, c'est-à-dire $a = 10^\alpha$ et $b = 10^\beta$. Alors

$$a \cdot b = 10^\alpha \times 10^\beta = 10^{\alpha+\beta},$$

donc, par définition du logarithme, $\log(a \cdot b) = \alpha + \beta = \log a + \log b$. ■

On en déduit les autres règles (avec $a, b > 0$ et n entier) :

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b, \quad \log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log a, \quad \log(a^n) = n \log a.$$

5. Conséquence : comprimer les échelles

La propriété fondamentale transforme une **multiplication** en **addition** : multiplier par 10 revient à **ajouter** 1 au logarithme.

$$\log(10 \times x) = \log x + 1.$$

Un domaine immense devient ainsi un intervalle maniable : les concentrations de 10^{-14} à $1 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$ se replient sur l'intervalle $[-14; 0]$. C'est pour cette raison que le logarithme sert d'échelle au **pH**, aux **décibels**, à la **magnitude** des étoiles ou à l'échelle de **Richter**.

6. À la calculatrice

- La touche **log** donne le logarithme décimal.
- Sa réciproque 10^x (souvent la seconde fonction de **log**) calcule une puissance de 10, **y compris décimale**. Par exemple $10^{-3,1} = 7,94 \times 10^{-4}$.
- La touche **EE** sert à **saisir un nombre en écriture scientifique** (mantisse puis exposant) : on tape 3 **EE** -2 pour entrer 3×10^{-2} . Ainsi $-\log(3 \times 10^{-2}) = 1,52$.

Pièges fréquents

Ne pas confondre **EE** et 10^x .

EE signifie « $\times 10^{\dots}$ » et sert à *écrire* un nombre en écriture scientifique. Pour entrer $3,4 \times 10^{-2}$, taper 3.4 **EE** -2.

10^x *calcule* une puissance de 10. Pour entrer $10^{-2,7}$, taper 10^x (-) 2.7.

Cap bac — l'indispensable

$$y = \log x \Leftrightarrow x = 10^y$$

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b \text{ et } \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$

$$\log 10 = 1 \text{ et } \ll \times 10 \Rightarrow +1 \text{ en log} \gg$$