

## E.C.E.

1. Le raisonnement du cours n'utilise nulle part  $T_i > T_0$  : le bilan d'énergie et la loi de Newton valent dans les deux sens de transfert. Ici  $T_i - T_0 = 10,7 - 20,7 = -10,0$  °C : le terme exponentiel est négatif et s'éteint, donc  $T(t)$  **monte** vers  $T_0$  par en dessous — la même loi, avec un écart initial de signe opposé.
2. *Tangente à l'origine* : elle coupe l'asymptote  $T_0$  à  $t = \tau$  ; avec une pente initiale de  $0,20$  °C·min<sup>-1</sup> et un écart de  $10,0$  °C à combler,  $\tau \approx 10,0/0,20 = 50$  min. *Lecture des 37 %* : il reste 37 % de l'écart quand  $T = 20,7 - 0,37 \times 10,0 = 17,0$  °C ; la courbe passe par  $17,0$  °C vers  $t \approx 47$  min. Les deux lectures donnent  $\tau \approx 47$ -50 min.
3. De  $\tau = \frac{mc}{hS}$  on tire  $h = \frac{mc}{S\tau}$ , soit, avec  $\tau \approx 49$  min :

$$h = \frac{0,0300 \times 4185}{39 \times 10^{-4} \times 49 \times 60} = 11 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Il s'agit du coefficient d'échange **effectif** dans les conditions du TP : il ne sépare pas la convection des autres pertes.

4. Les deux lectures encadrent  $\tau$  entre 47 et 50 min. Leur milieu vaut 48,5 min et leur demi-étendue 1,5 min. En arrondissant l'incertitude-type par excès à un chiffre significatif, puis la valeur au même rang :

$$\tau = (49 \pm 2) \text{ min}.$$

Si seules les incertitudes sur  $\tau$  sont retenues,

$$u(h) = h \frac{u(\tau)}{\tau} = 11 \times \frac{2}{49} = 0,5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1},$$

donc  $h = (11,0 \pm 0,5) \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ . Cette valeur sous-estime l'incertitude réelle, car la surface  $S$  est seulement estimée. Causes possibles : la tangente à l'origine est tracée sur les tout premiers points, très sensibles au bruit de mesure ; le coefficient  $h$  n'est pas rigoureusement constant (l'air de la salle bouge, l'écart de température varie) ; l'évaporation et les échanges par le fond du bécher ne sont pas modélisés. Les estimations restent groupées à quelques pour-cent près : l'écart entre elles mesure l'incertitude de la détermination (fiche **O4**), il ne signale pas un modèle faux — le nuage de points épouse l'exponentielle sur toute l'heure de mesure.

## Exercices

### Corrigé de l'exercice 1 — Le thé trop chaud

1. Le système {thé} est incompressible et n'échange aucun travail. Sur une durée  $\Delta t$ , le premier principe donne  $\Delta U = Q$ , avec  $Q = \phi \Delta t$  et  $\Delta U = m c \Delta T$ . On obtient donc  $m c \Delta T / \Delta t = \phi$ . Lorsque  $\Delta t$  tend vers zéro, puis en utilisant la loi de Newton fournie :

$$m c \frac{dT}{dt} = h S (T_0 - T) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dT}{dt} + \frac{1}{\tau} T = \frac{T_0}{\tau}, \quad \tau = \frac{m c}{h S}.$$

2.  $m c = 0,250 \times 4185 = 1,05 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$  et  $h S = 25 \times 200 \times 10^{-4} = 0,50 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  
d'où  $\tau = \frac{m c}{h S} = \frac{1,05 \times 10^3}{0,50} = 2,1 \times 10^3 \text{ s} \simeq 35 \text{ min}$ .
3. Régime permanent : aux temps longs  $T \rightarrow T_0$ , donc  $B = T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ . Condition initiale :  $A = T_i - T_0 = 60 \text{ }^\circ\text{C}$ . D'où

$$T(t) = 20 + 60 e^{-t/\tau} \quad (\text{en } ^\circ\text{C}).$$

4. On cherche  $t$  tel que  $T = 45 \text{ }^\circ\text{C}$ , soit  $e^{-t/\tau} = \frac{45 - 20}{60} = \frac{25}{60}$  :

$$t = \tau \ln \frac{60}{25} = 2,1 \times 10^3 \times 0,88 = 1,8 \times 10^3 \text{ s} \simeq 31 \text{ min}.$$

Le thé devient donc buvable après environ une demi-heure.

5. À  $t = 1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$ , soit environ  $1,7 \tau$  :  $T = 20 + 60 e^{-3600/2092} = 31 \text{ }^\circ\text{C}$ . Le thé est déjà tiède — l'essentiel du refroidissement se joue dans la première heure, et la fin de la courbe traîne vers  $T_0$  sans jamais la franchir.

### Corrigé de l'exercice 2 — Chauffage d'une voiture électrique (sujet bac)

1. À vitesse constante, l'énergie consommée par la propulsion est proportionnelle à la distance : les 242 km de la batterie pleine correspondent à 40 kWh, donc les  $242 - 200 = 42 \text{ km}$  d'autonomie perdus représentent l'énergie passée dans le chauffage :

$$E_{\text{chauffage}} = 40 \times \frac{42}{242} = 6,9 \text{ kWh}.$$

2. Toute cette énergie élèverait l'énergie interne de l'air de l'habitacle :  $E_{\text{chauffage}} = \rho V c \Delta T$ , d'où

$$\Delta T = \frac{E_{\text{chauffage}}}{\rho V c} = \frac{6,9 \times 3600 \text{ kJ}}{1,3 \times 2,6 \times 1,0} = 7,3 \times 10^3 \text{ K}.$$

Une élévation de plus de 7 000 K est absurde : les hypothèses ne tiennent pas. En réalité, l'essentiel de l'énergie s'échappe par transfert thermique à travers les parois (l'habitacle n'est pas isolé), et le chauffage sert précisément à **compenser ces pertes** — comme le chauffage d'une maison (exercice 4).

3. L'habitable (20 °C) est plus chaud que l'air extérieur (5 °C) : le transfert thermique se fait spontanément du chaud vers le froid (chapitre 17), donc de l'habitable vers l'extérieur.
4. Dans l'équation,  $\frac{dT_{\text{hab}}}{dt}$  est en  $\text{K}\cdot\text{s}^{-1}$  et  $T_0 - T_{\text{hab}}$  en K : pour que les deux membres aient la même dimension,  $\tau$  doit être un **temps**. C'est le temps caractéristique du refroidissement : la tangente à l'origine coupe l'asymptote  $T_0$  à  $t = \tau$ , et le régime permanent est atteint vers  $5\tau$ .
5. Aux temps longs,  $T_{\text{hab}} \rightarrow T_0$  et l'exponentielle s'annule :  $B = T_0$ . À  $t = 0$ ,  $T_{\text{hab}}(0) = A + B = T_i$ , d'où  $A = T_i - T_0$ .
6. La tangente à l'origine coupe l'asymptote  $T_{\text{hab}} = 5\text{ °C}$  à  $t = \tau$  : on lit  $\tau \approx 14\text{ min}$ . (Contrôle : à  $t = \tau$ , la courbe doit passer par  $5 + 0,37 \times 15 \approx 11\text{ °C}$  — c'est le cas.)
7. Rouler plus vite renouvelle plus rapidement l'air au contact de la carrosserie : la convection est plus efficace, le coefficient d'échange  $h$  augmente, donc  $\tau = mc/(hS)$  diminue — l'habitable refroidit plus vite, comme lorsqu'un souffle accélère le refroidissement d'un liquide chaud.

### Corrigé de l'exercice 3 — Bilans radiatifs : la Lune et Mars

1. Les rayons solaires arrivent quasi parallèles : l'astre ne les intercepte que sur son ombre, un **disque** d'aire  $\pi R^2$ . Il émet en revanche par **toute sa surface**, la sphère  $4\pi R^2$  — d'où le facteur 4 du bilan.
2.  $T = \left( \frac{\varphi_0(1-a)}{4\sigma} \right)^{1/4} = \left( \frac{1361 \times 0,88}{4 \times 5,67 \times 10^{-8}} \right)^{1/4} = 2,7 \times 10^2\text{ K} \simeq -4\text{ °C}$ . Sans atmosphère, la Lune n'a **aucun effet de serre** : le bilan radiatif ne décrit son équilibre. Et sans atmosphère pour lisser les échanges, la surface oscille très fortement autour de cet équilibre entre le jour et la nuit — plus de cent degrés d'amplitude.
3. Pour Mars :  $T' = \left( \frac{586 \times 0,75}{4 \times 5,67 \times 10^{-8}} \right)^{1/4} = 2,1 \times 10^2\text{ K} \simeq -63\text{ °C}$ . L'observation ( $-58\text{ °C}$ ) donne un effet de serre d'environ  $+5\text{ °C}$  : bien plus faible que les  $+33\text{ °C}$  terrestres.
4. Oui : l'effet de serre dépend de la **quantité** de gaz absorbant l'infrarouge, pas seulement de sa proportion. L'atmosphère martienne, presque pur dioxyde de carbone mais très ténue, retient peu d'infrarouge : quelques degrés. La composition ne fait pas tout — la masse d'atmosphère compte.

### Corrigé de l'exercice 4 — Ce que rapporte une isolation

1. Pour le système à la température  $T$ ,  $\phi = \frac{T_{\text{ext}} - T}{R_{\text{th}}}$ , donc

$$\phi = \frac{-1 - 19}{0,050} = -4,0 \times 10^2\text{ W}.$$

Le signe négatif signifie que le système cède de l'énergie ; la puissance perdue vaut  $-\phi = |\phi| = 400\text{ W}$ .

2.  $E_{\text{perdue}} = -\phi \cdot \Delta t = 400 \text{ W} \times 24 \text{ h} = 9,6 \text{ kWh}$  pour la journée.
3. La résistance ayant doublé, la valeur absolue du flux est divisée par deux :  $\phi' = -2,0 \times 10^2 \text{ W}$ , soit  $E' = 4,8 \text{ kWh}$  par jour. L'isolation divise par deux la facture de chauffage de la journée — et ce facteur vaut pour tout l'hiver, à écart de température comparable.
4. En régime permanent, la température  $T$  du système ne varie plus : l'énergie interne de la maison est constante, et tout ce que le chauffage fournit part à travers l'enveloppe. Le chauffage ne « monte » pas la température, il **compense la puissance perdue** — il compense exactement le flux sortant.

### Corrigé de l'exercice 5 — Une bouteille sortie du réfrigérateur

1. À  $t = 0$ ,

$$\phi(0) = 18 \times 3,0 \times 10^{-2} \times (22,0 - 8,0) = 7,6 \text{ W}.$$

Le flux reçu est positif : l'eau, plus froide que le thermostat, gagne de l'énergie et se réchauffe.

2. Le travail étant nul, le premier principe donne  $\Delta U = Q$ . Or  $\Delta U = m c \Delta T$  et  $Q = \phi \Delta t$ . Après division par  $\Delta t$ , puis passage à la limite,

$$m c \frac{dT}{dt} = \phi = h S (T_0 - T).$$

3. En développant puis en divisant par  $m c$ ,

$$\frac{dT}{dt} + \frac{hS}{mc} T = \frac{hS}{mc} T_0.$$

Par identification avec la forme demandée,

$$\boxed{\tau = \frac{m c}{h S}}.$$

Le rapport  $(\text{J} \cdot \text{K}^{-1}) / (\text{W} \cdot \text{K}^{-1})$  est en secondes. Numériquement,

$$\tau = \frac{0,300 \times 4,18 \times 10^3}{18 \times 3,0 \times 10^{-2}} = 2,3 \times 10^3 \text{ s} \simeq 39 \text{ min}.$$

4. La solution générale est  $T = A e^{-t/\tau} + B$ . Aux temps longs,  $T \rightarrow T_0$ , donc  $B = T_0 = 22,0 \text{ }^\circ\text{C}$ . La condition initiale donne  $A = T_i - T_0 = -14,0 \text{ }^\circ\text{C}$ , d'où

$$\boxed{T(t) = 22,0 - 14,0 e^{-t/\tau}}.$$

5. Pour  $T = 18,0 \text{ }^\circ\text{C}$ ,

$$e^{-t/\tau} = \frac{22,0 - 18,0}{14,0} = \frac{2}{7}, \quad t = \tau \ln\left(\frac{7}{2}\right) \simeq 49 \text{ min}.$$

6. Pour l'ensemble des deux bouteilles identiques, la masse totale et la surface totale d'échange sont doublées :

$$\tau' = \frac{(2m)c}{h(2S)} = \frac{mc}{hS} = \tau.$$

Chaque bouteille évolue donc comme si elle était seule, et le temps caractéristique de l'ensemble ne change pas.

## Corrigé — Question de réflexion — Le métal « plus froid » que le bois

La main ne mesure pas une température : elle mesure le **flux thermique** qui la traverse. Métal et bois sont tous deux à 20 °C, mais la peau, à  $\approx 34$  °C, leur cède de l'énergie — et tout se joue sur le débit. Le métal est un excellent conducteur : il évacue l'énergie reçue de proche en proche vers tout son volume, entretient l'écart de température au contact, et le flux prélevé sur la main reste élevé — sensation de froid. Le bois, mauvais conducteur, voit sa surface se réchauffer presque aussitôt au contact de la peau : l'écart local s'effondre, le flux devient minime, et la sensation est neutre. En termes de résistance thermique : à écart identique, la valeur absolue  $|\phi| = |\Delta T|/R_{\text{th}}$  est grande quand  $R_{\text{th}}$  est petite (métal), faible quand elle est grande (bois). Le thermomètre qu'est la main est en réalité un fluxmètre.

## Corrigé — Problème de Fermi — Le temps de refroidissement d'un café

**Découpage en sous-estimations.** Un grand café contient quelques dixièmes de kilogramme :  $m \sim 10^{-1}$  kg. La surface latérale et le dessus du mug représentent quelques centaines de centimètres carrés :  $S \sim 10^{-2}$  m<sup>2</sup>. Pour l'eau,  $c \sim 10^3$  J·kg<sup>-1</sup>·K<sup>-1</sup>, et la donnée fournit  $h \sim 10^1$  W·m<sup>-2</sup>·K<sup>-1</sup>. Ainsi,

$$\tau = \frac{mc}{hS} \sim \frac{10^{-1} \times 10^3}{10^1 \times 10^{-2}} \sim 10^3 \text{ s.}$$

Le temps caractéristique est donc de l'ordre de quelques dizaines de minutes.

**Affinement à un chiffre significatif.** Prenons  $m \approx 0,3$  kg,  $S \approx 3 \times 10^{-2}$  m<sup>2</sup>,  $c \approx 4 \times 10^3$  J·kg<sup>-1</sup>·K<sup>-1</sup> et  $h \approx 2 \times 10^1$  W·m<sup>-2</sup>·K<sup>-1</sup> :

$$\tau = \frac{mc}{hS} \approx \frac{0,3 \times 4 \times 10^3}{2 \times 10^1 \times 3 \times 10^{-2}} \approx 2 \times 10^3 \text{ s,}$$

soit environ une demi-heure, cohérente avec l'ordre de grandeur précédent. Servi à 70 °C dans une pièce à 20 °C, le café est buvable à 55 °C quand il reste  $35/50 = 70\%$  de l'écart, c'est-à-dire vers  $t = \tau \ln(50/35) \approx 0,35 \tau \sim 10^3$  s : une dizaine de minutes avec les valeurs affinées, et quelques dizaines de minutes compte tenu de la variabilité de  $h$  et de la géométrie. L'ordre de grandeur est conforme à l'expérience commune — et il explique pourquoi un café oublié une heure est devenu tiède.

## Programmation Python

1. Dans la boucle qui parcourt `t_mod`, la ligne complétée est `T_mod.append(T_0 + (T_i - T_0) * math.exp(-t / tau))` : chaque date `t` reçoit la valeur du modèle du cours.
2. Pour `tau = 20`, la courbe monte trop vite : dès 20 min elle dépasse nettement les points mesurés. Pour `tau = 80`, elle monte trop lentement et passe sous le nuage. Pour `tau = 47`, le modèle épouse les mesures sur toute la durée : le temps caractéristique du TP vaut environ 47 min — en accord avec les lectures de l'E.C.E.

3. De  $T = T_0 + (T_i - T_0)e^{-t/\tau}$  on tire  $T_0 - T = (T_0 - T_i)e^{-t/\tau}$ , puis, en divisant par  $\Delta T_0 = 1 \text{ K}$  et en prenant le logarithme népérien (fiche **M6**) :

$$\ln\left(\frac{T_0 - T}{\Delta T_0}\right) = \ln\left(\frac{T_0 - T_i}{\Delta T_0}\right) - \frac{t}{\tau}.$$

Cette écriture est rigoureuse car l'argument du logarithme est sans dimension. Numériquement, diviser un écart exprimé en kelvins par 1 K laisse le même nombre : le code Python utilise donc simplement `math.log(T_0 - T)`. La courbe de ce logarithme **en fonction de**  $t$  est une droite, de pente  $-1/\tau$ . Avec les points du tableau : à  $t = 0$ ,  $\ln(10,0) = 2,30$  ; à  $t = 44 \text{ min}$ ,  $\ln(20,7 - 16,7) = \ln(4,0) = 1,39$ . La pente vaut  $(1,39 - 2,30)/44 = -2,1 \times 10^{-2} \text{ min}^{-1}$ , d'où  $\tau = 1/(2,1 \times 10^{-2}) = 48 \text{ min}$  — en bon accord avec l'ajustement graphique de la question 2.