

E.C.E.

1. La charge n'est complète (à 1 % près) qu'au bout de 5τ : il faut que chaque demi-période laisse ce temps-là au condensateur, sinon la décharge commence avant la fin de la charge. Avec des créneaux trop rapides, u_C n'atteindrait jamais ni E ni 0 : on verrait une oscillation « en dents de scie arrondies » entre deux valeurs intermédiaires.
2. **Tangente à l'origine** : elle coupe l'asymptote à $t = \tau$, donc $\tau = \frac{E}{\text{pente}} = \frac{5,0}{4,8} = 1,04 \text{ s}$ (la tangente, de pente E/τ , atteint E en $t = \tau$). **Lecture à 63 %** : $u_C = 0,63 \times 5,0 = 3,2 \text{ V}$ est atteint, sur la courbe, à $t = 1,0 \text{ s}$. **Régression** : pour une charge, $1 - u_C/E = e^{-t/\tau}$, donc $\ln(1 - u_C/E) = -t/\tau$: la pente vaut $-1/\tau$, d'où $\tau = 1/1,00 = 1,0 \text{ s}$.
3. $C = \tau/R$: respectivement $104 \mu\text{F}$, $100 \mu\text{F}$ et $100 \mu\text{F}$ — cohérent avec la valeur nominale de $100 \mu\text{F}$ (dont la tolérance dépasse souvent 10 %).
4. Causes possibles : la **tangente** s'appuie sur deux ou trois points de mesure bruités (une pente initiale mesurée à $4,8 \text{ V}\cdot\text{s}^{-1}$ au lieu de $5,0$ suffit à décaler τ de 4 %); la résistance d'entrée du microcontrôleur, très grande mais pas infinie, prélève un courant minuscule; l'arrondi du convertisseur (pas de $5/1023 \text{ V}$). La **régression** est la plus robuste : elle utilise **tous** les points, quand la tangente n'en utilise que deux et la lecture à 63 % un seul (fiche **04** : multiplier les points réduit l'effet du bruit).
5. Pour les douze mesures, la calculatrice donne $\bar{C} = 102,2217 \mu\text{F}$ et $s = 0,0463 \mu\text{F}$. L'incertitude-type sur la moyenne vaut

$$u(\bar{C}) = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{0,0463}{\sqrt{12}} = 0,0134 \mu\text{F}.$$

On arrondit l'incertitude à un chiffre significatif par excès, puis la moyenne au même rang :

$$C = (102,22 \pm 0,02) \mu\text{F}.$$

Cette petite incertitude quantifie la **répétabilité** de la moyenne : les fluctuations aléatoires se compensent. Elle ne couvre pas un biais commun aux douze mesures (valeur de R , étalonnage de A_0 , tension de référence). Une mesure très répétable n'est donc pas automatiquement exacte.

6. Branchée aux bornes de C , la DEL offrirait au condensateur un **second chemin de décharge**, et un chemin **non ohmique** (elle ne conduit qu'au-delà de son seuil, environ 2 V) : le circuit ne serait plus le dipôle RC série du modèle, l'évolution ne serait plus une exponentielle de constante RC , et le τ mesuré ne vaudrait plus RC . L'effet lumineux serait réel (et joli) — mais la manipulation ne

mesurerait plus ce qu'on veut mesurer. En dernière remarque qualitative : le fondu s'interromprait avant la décharge complète, la DEL s'éteignant sous son seuil (voir la question de réflexion).

Exercices

Corrigé de l'exercice 1 — Le tube fluorescent

1. Tant que $u_C < V_a$, le tube isolant ne prélève aucun courant : le circuit est un RC série sous E . Loi des mailles $E = u_R + u_C$, loi d'Ohm et $i = C u'_C$: $\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = \frac{E}{RC}$.
2. Méthode **M11** (régime permanent E , condition initiale nulle) : $u_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$ avec $\tau = RC = 60 \times 10^3 \times 0,60 \times 10^{-6} = 36 \text{ ms}$.
3. $i(0^+) = \frac{E}{R} = \frac{100}{60 \times 10^3} = 1,7 \text{ mA}$.
4. $u_C(t_a) = V_a$ s'écrit $1 - e^{-t_a/\tau} = V_a/E$, soit $e^{-t_a/\tau} = \frac{E - V_a}{E}$, d'où $t_a = \tau \ln \frac{E}{E - V_a} = 36 \times 10^{-3} \times \ln 5 = 58 \text{ ms}$. Le tube s'éclaire puis s'éteint toutes les $\sim 60 \text{ ms}$: la lampe **clignote**, environ 17 fois par seconde.
5. $\mathcal{E} = \frac{1}{2} C V_a^2 \simeq \frac{1}{2} \times 0,60 \times 10^{-6} \times 80^2 = 1,9 \text{ mJ}$ à chaque éclair (*l'énoncé arrondit parfois avec $E = 100 \text{ V}$: $\frac{1}{2} C E^2 = 3,0 \text{ mJ}$, majorant*).
6. Le tube possède une **tension d'amorçage** distincte de sa tension d'extinction : isolant en dessous, conducteur au-dessus, il bascule entre deux états — c'est cette bascule (une *hystérésis*) qui entretient le cycle charge/décharge. Une DEL n'a rien de tel : au voisinage de son seuil elle conduit continûment, sans basculer ; en régime permanent le montage s'équilibre, il ne peut pas osciller. D'où le microcontrôleur de l'E.C.E. : sans hystérésis dans le circuit, c'est **lui** qui impose l'alternance.

Corrigé de l'exercice 2 — Charge et décharge quantitatives

1. $\tau = RC = 10,0 \times 10^3 \times 100 \times 10^{-6} = 1,0 \text{ s}$; $u_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$.
2. $u_C(2,0) = 5,0(1 - e^{-2,0}) = 4,3 \text{ V}$.
3. $i(0^+) = E/R = 5,0/(10,0 \times 10^3) = 0,50 \text{ mA}$. En régime permanent le condensateur est chargé : plus aucune charge ne circule, $i = 0$ (interrupteur ouvert).
4. $u_C = 0,99 E$ donne $e^{-t/\tau} = 0,01$, donc $t = \tau \ln 100 = 1,0 \times 4,6 = 4,6 \text{ s}$: le critère des 5τ est un arrondi commode (et légèrement majorant) de ce calcul exact.
5. Décharge : $u_C(t) = E e^{-t/\tau}$, donc $u_C(3,0) = 5,0 e^{-3,0} = 0,25 \text{ V}$ — il reste 5,0 % de la tension initiale.

Corrigé de l'exercice 3 — Le capteur de niveau

1. La capacité dépend de la géométrie **et de l'isolant** entre les armatures (§1.4) : à géométrie fixée, changer le milieu qui les sépare change la quantité de charges stockées à tension donnée, donc C .
2. La jauge est le C d'un dipôle RC : $\tau = RC$ varie avec le niveau. On mesure τ comme à l'E.C.E. (tangente, 63 % ou régression sur la réponse aux créneaux) et une courbe d'étalonnage $\tau \leftrightarrow$ niveau fait le reste.
3. $R = \frac{\tau_1}{C_1} = \frac{2,0 \times 10^{-3}}{200 \times 10^{-9}} = 1,0 \times 10^4 \Omega = 10 \text{ k}\Omega$; puis $C_2 = \frac{\tau_2}{R} = \frac{6,0 \times 10^{-3}}{1,0 \times 10^4} = 6,0 \times 10^{-7} \text{ F} = 600 \text{ nF}$ — le triple de C_1 , cohérent avec un liquide qui « remplace » l'air.
4. Par exemple : l'**écran tactile** (le doigt conducteur modifie la capacité de la cellule qu'il approche); l'**accéléromètre MEMS** (l'accélération déplace une armature mobile, la distance entre armatures varie); un capteur de **proximité** (l'objet qui s'approche change le milieu entre les armatures).

Corrigé de l'exercice 4 — D'un circuit à une chute : traduire

1. On divise par m : $v' + \frac{k}{m}v = g$, donc $a = k/m$ et $b = g$. C'est la **vitesse** $v(t)$ qui joue le rôle de $u_C(t)$: la grandeur qui évolue vers son régime permanent.
2. $\tau = \frac{1}{a} = \frac{m}{k} = \frac{80}{16} = 5,0 \text{ s}$; $v_{\text{lim}} = B = \frac{b}{a} = \frac{mg}{k} = \frac{80 \times 9,81}{16} = 49 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ (soit environ $180 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$, la valeur citée au chapitre 14).
3. Dictionnaire : $E \leftrightarrow v_{\text{lim}} = mg/k$ (le régime permanent); $RC \leftrightarrow m/k$ (le temps caractéristique); $u_C(0) = 0 \leftrightarrow v(0) = 0$ (départ sans vitesse — le condensateur déchargé).
4. À 1 % près, le régime permanent est atteint vers $5\tau = 25 \text{ s}$ — même critère que pour le RC, puisque c'est la même équation (résolue une fois pour toutes dans M11).

Corrigé de l'exercice 5 — Dans l'accéléromètre MEMS d'un téléphone

1. Au repos, les deux condensateurs ont la même géométrie : même surface, même isolant et même distance d , donc $C_L = C_R = C_0$. La différence annule la valeur commune au repos et change de signe avec le déplacement : elle indique à la fois l'amplitude et le sens de l'accélération.
2. Quand le téléphone accélère vers la droite, l'inertie fait prendre du retard à la masse mobile : elle se déplace vers la gauche par rapport au boîtier, donc $x < 0$. L'entrefer gauche $d + x$ diminue : C_L augmente. L'entrefer droit $d - x$ augmente : C_R diminue. Ainsi $C_L > C_R$.
3. Au début de l'accélération, la masse prend du retard sur le boîtier et les ressorts se déforment. Après le bref régime transitoire, leur force est suffisante pour entraîner la masse avec le téléphone : le décalage x ne varie plus. La masse n'est donc pas immobile dans le référentiel terrestre ; elle y possède la même accélération a que le téléphone. Horizontalement, la résultante des forces exercées sur elle est la force de rappel $F_r = -kx$. La deuxième loi de Newton donne alors

$-kx = ma$, soit $x = -ma/k$. Ainsi

$$x = -\frac{2,0 \times 10^{-9} \times 9,81}{0,20} = -9,8 \times 10^{-8} \text{ m} = -0,098 \text{ } \mu\text{m}.$$

- On a $|x|/d = 0,049 \simeq 5 \%$: le déplacement est bien petit devant l'entrefer.
 4. Avec $x/d = -0,049$:

$$C_L = \frac{0,50}{1 - 0,049} = 0,526 \text{ pF}, \quad C_R = \frac{0,50}{1 + 0,049} = 0,477 \text{ pF}.$$

Ainsi $\Delta C = C_R - C_L = -0,049 \text{ pF} = -49 \text{ fF}$.

5. $C_L = C_0/(1 + x/d) \simeq C_0(1 - x/d)$ et $C_R = C_0/(1 - x/d) \simeq C_0(1 + x/d)$. Par différence,

$$\Delta C \simeq \frac{2C_0x}{d} = -\frac{2C_0m}{kd} a.$$

La sensibilité en valeur absolue vaut

$$\frac{|\Delta C|}{|a|} = \frac{2C_0m}{kd} = 5,0 \text{ fF} \cdot (\text{m} \cdot \text{s}^{-2})^{-1}.$$

6. Pendant une décharge, $u_C(t) = U_0 e^{-t/(RC)}$. Or $0,37 \simeq e^{-1}$: lorsque $u_C = 0,37 U_0$, on a donc $t = RC = \tau$. Les deux durées mesurées valent $\tau_L = RC_L = 100 \times 10^6 \times 0,526 \times 10^{-12} = 52,6 \text{ } \mu\text{s}$ et $\tau_R = 47,7 \text{ } \mu\text{s}$. Ici $\tau_L > \tau_R$, donc $C_L > C_R$: la masse s'est déplacée vers la gauche et le téléphone a accéléré vers la droite. La période d'acquisition vaut $T_e = 1/f_e = 1,0 \text{ ms}$: la mesure la plus longue ne dure qu'environ $T_e/19$. Le cycle peut donc être achevé avant le suivant. À $1,0 \text{ kHz}$, le dispositif fournit 1000 couples (τ_L, τ_R) — donc 1000 estimations de l'accélération — par seconde. La succession rapide de ces mesures discrètes donne un suivi quasi continu du mouvement.

Corrigé — Question de réflexion — Le voyant qui s'éteint lentement

Le fondu révèle que le boîtier contient des **condensateurs** (ceux du filtrage de l'alimentation) : débranché, plus de source, et ils se **déchargent** dans les circuits encore connectés — dont la diode témoin — avec un temps caractéristique de l'ordre de la seconde, signature d'une décharge de type RC. La lueur s'éteint **avant** la décharge complète parce qu'une diode ne conduit — donc n'éclaire — qu'au-dessus de sa tension **de seuil** (environ 2 V) : quand u_C passe sous ce seuil, la DEL s'éteint alors qu'il reste de la charge, qui achève de s'écouler par d'autres chemins. On retrouve les deux idées de l'E.C.E. : l'exponentielle de décharge, et le seuil de la diode.

Corrigé — Problème de Fermi — La rapidité d'un écran tactile

Le tableau du §1.3 place une cellule capacitive microscopique dans le domaine des picofarads. Retenons $C \sim 10 \text{ pF} = 10^{-11} \text{ F}$. Un geste bref du doigt sur un écran dure quelques dixièmes de seconde ; prenons $T_{\text{doigt}} \sim 10^{-1} \text{ s}$.

La réponse doit donc être établie en environ

$$T_{\text{réponse}} \sim \frac{T_{\text{doigt}}}{100} \sim 10^{-3} \text{ s}.$$

Or le critère des 1 % donne $T_{\text{réponse}} \simeq 5\tau = 5RC$. La résistance doit ainsi vérifier

$$R \lesssim \frac{T_{\text{réponse}}}{5C} \sim \frac{10^{-3}}{5 \times 10^{-11}} \sim 2 \times 10^7 \Omega.$$

La valeur maximale est donc de l'ordre de $10^7 \Omega$, soit quelques dizaines de mégohms. Cet ordre de grandeur est désormais un **résultat du dimensionnement**, et non une estimation inaccessible.

À la limite choisie, une lecture demande environ 10^{-3} s : la cellule peut donc être interrogée de l'ordre de

$$N \sim \frac{1}{T_{\text{réponse}}} \sim 10^3$$

fois par seconde. Même si l'appareil doit balayer de nombreuses cellules et filtrer le bruit, le modèle RC rend plausible une réponse qui paraît instantanée à l'utilisateur.

Programmation Python

1. `u_suivant = us[len(us) - 1] + dt * (E - us[len(us) - 1]) / tau` — la valeur précédente, plus la pente $(E - u_n)/\tau$ multipliée par le pas.
2. Avec $\Delta t = \tau$, le premier pas donne $u_1 = 0 + 1,0 \times (5 - 0)/1,0 = 5,0 \text{ V}$: Euler atteint E **en un seul pas** et y reste — tout le régime transitoire est écrasé. Un pas trop grand ne rend pas la méthode fausse « un peu » : il peut manquer toute la physique du transitoire.
3. À $t = 5\tau$, la solution exacte vaut 4,966 V ; Euler donne 5,000 V pour $\Delta t = 1,0 \text{ s}$ (écart 0,7 %), 4,974 V pour 0,1 s (0,2 %) et 4,970 V pour 0,05 s (0,1 %) : l'écart **diminue avec le pas** — la méthode converge vers la solution exacte, c'est ce qui la rend utilisable partout où l'équation, elle, ne se résout pas à la main.