

Exercices

Corrigé de l'exercice 1 — Vénus, le déroulé complet

1. Le Soleil (S) attire Vénus (V) : $\vec{F}_{S/V} = -G \frac{M_{\odot} m_V}{D^2} \vec{u}_{S \rightarrow V}$, dirigée de Vénus **vers le Soleil**.
2. Deuxième loi (référentiel héliocentrique galiléen) : $\vec{a} = -GM_{\odot}/D^2 \vec{u}$, purement centripète. Identifiée à l'expression de Frenet : composante tangentielle nulle ($dv/dt = 0$: uniforme) et $v^2/D = GM_{\odot}/D^2$, d'où $v = \sqrt{GM_{\odot}/D}$.
3. $v = \sqrt{\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 1,989 \times 10^{30}}{1,08 \times 10^{11}}} = 3,51 \times 10^4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 35,1 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$; $T = 2\pi D/v = 1,93 \times 10^7 \text{ s} = 224 \text{ jours}$. L'accord avec la valeur mesurée (224,7 j, écart 0,3 %) valide à la fois le modèle circulaire et la loi de gravitation.

Corrigé de l'exercice 2 — Le satellite géostationnaire

1. L'orbite doit être **circulaire**, située dans le **plan équatorial**, parcourue dans le **même sens** que la rotation terrestre, avec une période égale au **jour sidéral**. La troisième loi fixe alors le rayon : il n'existe qu'un seul anneau orbital géostationnaire.
2. 23 h 56 min (= 86 164 s) : le jour **sidéral**, durée d'un tour de la Terre sur elle-même — les 24 h du jour solaire incluent le rattrapage dû au déplacement de la Terre autour du Soleil.
3. $r = \sqrt[3]{GM_T T^2 / 4\pi^2} = 4,22 \times 10^7 \text{ m}$, d'où $h = r - R_T = 3,58 \times 10^4 \text{ km}$ et $v = 2\pi r/T = 3,07 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$.
4. Avec 86 400 s, r augmente de 77 km : une « erreur de calendrier » qui vaut un créneau orbital entier.

Corrigé de l'exercice 3 — Phobos, Déimos, et la masse de Mars

1. $T_1^2/r_1^3 = (0,319 \times 86\,400)^2 / (9,376 \times 10^6)^3 = 9,22 \times 10^{-13} \text{ s}^2\cdot\text{m}^{-3}$; $T_2^2/r_2^3 = 9,22 \times 10^{-13}$ également : même constante, comme l'exige la 3^e loi autour d'un même astre.
2. $M_{\text{Mars}} = \frac{4\pi^2}{G \times 9,22 \times 10^{-13}} = 6,42 \times 10^{23} \text{ kg}$.
3. $T \propto r^{3/2}$: un rayon 2,5 fois plus grand donne une période $2,5^{3/2} = 4,0$ fois plus longue — et de fait $1,263/0,319 = 3,96$. La loi utilisée comme pure proportion, sans jamais connaître M .

Corrigé de l'exercice 4 — Pesez Jupiter (comme Galilée)

1. Les quatre rapports valent $3,11$ à $3,12 \times 10^{-16} \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$: identiques à mieux de $0,1\%$ — la 3^e loi, avec une netteté que les planètes du §1 n'atteignaient pas.
2. Non : la constante des planètes est celle **du Soleil** ($4\pi^2/GM_\odot$) ; celle-ci est celle **de Jupiter** — c'est lui qui tient ses lunes.
3. $M_J = \frac{4\pi^2}{G \times 3,11 \times 10^{-16}} = 1,90 \times 10^{27} \text{ kg}$ — trois cents fois la Terre, un millièème du Soleil.

Corrigé de l'exercice 5 — Vostok 1

1. $r = R_T + h = 6,69 \times 10^6 \text{ m}$; $v = \sqrt{GM_T/r} = 7,7 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \simeq 2,8 \times 10^4 \text{ km/h}$.
2. $T = 2\pi r/v = 5,4 \times 10^3 \text{ s} \simeq 91 \text{ min}$.
3. Oui, tout juste : les 108 minutes du vol couvrent un tour d'orbite (91 min) plus la montée et la rentrée — un tour du monde en une heure et demie, le 12 avril 1961.

Corrigé — Exercice de réflexion — Pourquoi Thomas Pesquet flotte-t-il ?

Dans le référentiel géocentrique (galiléen) : Pesquet subit une seule force, son poids $\vec{F} = m\vec{g} = 650 \text{ N}$, non compensée. La deuxième loi s'applique et donne $\vec{a} = \vec{g} = 8,67 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$: il est **en chute libre** — comme le boulet de Newton, comme le marteau d'Apollo — mais lancé à $7,7 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, si bien que sa chute **rate la Terre** indéfiniment. Rien n'a disparu : ni la gravitation, ni le poids.

Dans le référentiel de la station : Pesquet est immobile, $\vec{a} = \vec{0}$. Or une force non compensée de 650 N s'exerce toujours sur lui. La relation $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ ne peut donc pas y être appliquée directement : ce référentiel **n'est pas galiléen**. Et il ne peut pas l'être, puisque la station est elle-même en chute libre, accélérée en permanence vers la Terre. Il faudrait introduire une force d'inertie pour écrire la dynamique dans ce référentiel.

Conclusion : l'« apesanteur » est un **artefact du changement de référentiel** — l'illusion produite quand l'observateur tombe exactement comme l'observé. Le terme des agences spatiales, « microgravité », est plus honnête : la gravité est là, à 88% ; c'est le plancher qui tombe avec vous.

Corrigé — Problème de Fermi — Le tour de la Terre en combien de temps ?

Le cours donne $T = 2\pi\sqrt{r^3/(GM_T)}$ — inutilisable de tête : personne ne connaît G ni M_T . **Le raccourci** : le §3 a montré que $g = GM_T/R_T^2$, donc $GM_T = gR_T^2$ — le produit encombrant se remplace par deux nombres que tout le monde connaît. L'ISS vole bas ($400 \text{ km} \ll 6400 \text{ km}$) : $r \simeq R_T$, et

$$T \simeq 2\pi\sqrt{\frac{R_T^3}{gR_T^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{R_T}{g}}.$$

Ordre de grandeur. On arrondit chaque facteur à la puissance de dix la plus proche : $2\pi \sim 10^1$, $R_T \sim 10^7$ m et $g \sim 10^1$ m·s⁻². Ainsi

$$T \sim 10^1 \sqrt{\frac{10^7}{10^1}} \sim 10^4 \text{ s} \sim 10^2 \text{ min.}$$

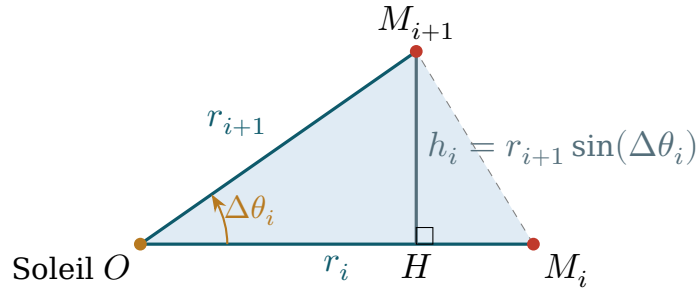
Estimation affinée. Avec les valeurs faciles à retenir $R_T \simeq 6,4 \times 10^6$ m et $g \simeq 10$ m·s⁻²,

$$T \simeq 2\pi \sqrt{\frac{6,4 \times 10^6}{10}} = 5,0 \times 10^3 \text{ s} = 84 \text{ min.}$$

La valeur réelle est 92,6 min ; l'écart vient principalement de l'altitude négligée. « L'ISS fait le tour de la Terre en une heure et demie » : la phrase que tout le monde a entendue vient d'être retrouvée avec très peu de données — grâce à une seule idée, $GM_T = gR_T^2$.

E.C.E. — Exploitation

1. Géométrie. On prend $OM_i = r_i$ comme **base**. La hauteur issue de M_{i+1} vaut $HM_{i+1} = r_{i+1} \sin(\Delta\theta_i)$: c'est le côté opposé à l'angle $\Delta\theta_i$ dans le triangle rectangle OHM_{i+1} .



le triangle OM_iM_{i+1} approche le secteur balayé lorsque le déplacement angulaire reste modéré

On retrouve donc, en écrivant « base $\times$ hauteur / 2 » :

$$S_i = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{r_i \times r_{i+1} \sin(\Delta\theta_i)}{2}.$$

Le véritable bord du secteur est courbe ; le segment $[M_iM_{i+1}]$ l'approche parce que les deux positions ne sont séparées que de cinq jours.

2. Aires calculées. $S_1 = \frac{1}{2} \times 0,3075 \times 0,315 \times \sin 31^\circ = 0,0249$ u.a.² ; $S_9 = \frac{1}{2} \times 0,464 \times 0,467 \times \sin 14^\circ = 0,0262$ u.a.² ; $S_{18} = \frac{1}{2} \times 0,31 \times 0,309 \times \sin 31^\circ = 0,0247$ u.a.² (l'écart $342^\circ \rightarrow 13^\circ$ vaut bien 31° en passant par 360°). Leur moyenne vaut 0,0253 u.a.² ; leur écart-type relatif vaut 2,6 % et l'écart entre les valeurs extrêmes vaut 5,9 %. Elles restent proches pour trois durées égales de cinq jours, alors que r varie d'un facteur $0,467/0,3075 = 1,52$.

3. Incertitudes sur les aires. La propagation fournie donne

$$\begin{aligned}u(S_1) &= 0,0010 \text{ u.a.}^2, \\u(S_9) &= 0,0026 \text{ u.a.}^2, \\u(S_{18}) &= 0,0010 \text{ u.a.}^2.\end{aligned}$$

On écrit donc $S_1 = (0,0249 \pm 0,0010) \text{ u.a.}^2$, $S_9 = (0,0262 \pm 0,0026) \text{ u.a.}^2$ et $S_{18} = (0,0247 \pm 0,0010) \text{ u.a.}^2$. Les trois intervalles se recouvrent : les mesures sont compatibles avec des aires égales, donc avec la **deuxième loi de Kepler**.

4. Troisième loi. $K = T^2/a^3 = 88,0^2/0,387^3 = 1,336 \times 10^5 \text{ j}^2 \cdot \text{u.a.}^{-3}$. De plus,

$$\frac{u(K)}{K} = 1,38 \%, \quad u(K) = 1,8 \times 10^3 \text{ j}^2 \cdot \text{u.a.}^{-3}.$$

Avec les arrondis adaptés :

$$K = (1,34 \pm 0,02) \times 10^5 \text{ j}^2 \cdot \text{u.a.}^{-3}.$$

La constante des planètes appartient à cet intervalle : la **troisième loi est vérifiée** compte tenu des incertitudes.

5. Vitesse. Vers $\theta \simeq 0^\circ$: c'est là que r est minimal (périhélie), et le tableau y montre les **plus grands** écarts angulaires (31° en 5 jours, contre 14° à l'aphélie) — pour balayer la même aire avec un rayon court, il faut courir. La deuxième loi, lue dans les données brutes.

Programmation Python

1. Les deux rayons r_i et r_{i+1} délimitent le triangle ; avec r_i comme base, sa hauteur vaut $r_{i+1} \sin(\Delta\theta_i)$. La formule programmée est donc bien « base $\times$ hauteur / 2 ». Le triangle approche le secteur parce que deux positions successives ne sont séparées que de cinq jours.
2. Les 18 aires s'étendent de 0,02467 à 0,02679 u.a.², autour d'une moyenne de 0,02559 u.a.². Leur écart-type relatif vaut 2,0 % : compte tenu de la précision des données et de l'approximation triangulaire, la deuxième loi est vérifiée.
3. `x.append(a[i] ** 3)` et `y.append(T[i] ** 2)`.
4. Non : les rapports s'étagent de 1,30 à $1,35 \times 10^5$ — à 4 % de dispersion. C'est **Mercure** qui s'écarte le plus (−2,4 % de la moyenne).
5. Avec $a = 0,387$: $T^2/a^3 = 1,333 \times 10^5$, et l'écart de Mercure tombe sous 0,5 %. La leçon : 0,39 n'a que **2 chiffres significatifs**, et l'erreur de 0,8 % sur a est **triplée par le cube** (fiche **O3**) — la dispersion du jeu de données n'était pas de la physique, mais de l'arrondi.
6. La régression donne

$$T^2 = (133\,967 \text{ j}^2 \cdot \text{u.a.}^{-3})a^3 - 13\,483 \text{ j}^2,$$

avec $u(b) = 16\,689 \text{ j}^2$. Ainsi $b = (-13\,483 \pm 16\,689) \text{ j}^2$: l'intervalle contient zéro. L'ordonnée à l'origine est compatible avec zéro ; les données sont donc compatibles avec la proportionnalité $T^2 = k a^3$ (**M3**).

7. $M_{\odot} = 1,98 \times 10^{30}$ kg, à 0,5 % de la valeur admise : six points et une régression pèsent le Soleil.