

TRAPPIST-1 : peser une étoile

Terminale spécialité Physique-Chimie · Gravitation et lois de Kepler

1. Un mouvement circulaire et uniforme

Circulaire. D'après la première loi de Kepler, chaque planète décrit une ellipse dont l'étoile occupe l'un des foyers. La plus excentrique des sept orbites du document 2 est celle de la planète f, avec $e_{\max} = 0,0101 < 0,02$: le critère du document 1 est satisfait pour les sept planètes, dont la distance à l'étoile ne s'écarte du demi-grand axe que de 1 % au plus. Les deux foyers sont pratiquement confondus au centre, l'ellipse se referme sur un **cercle** et le demi-grand axe a s'identifie au rayon r de l'orbite. On posera donc $r = a$ dans toute la suite.

Uniforme. D'après la deuxième loi de Kepler, le segment étoile-planète balaie des aires égales pendant des durées égales. Sur un cercle, la distance r ne varie pas : l'aire balayée pendant une durée Δt vaut

$$S = \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta.$$

Des aires égales en des durées égales imposent donc des angles $\Delta\theta$ égaux, donc des arcs de même longueur parcourus en des durées égales : la valeur de la vitesse est constante.

Le mouvement de chaque planète est donc **circulaire uniforme**, ce qui autorise à lui appliquer les résultats du cours établis dans ce cas.

Remarque. La voie dynamique du cours (deuxième loi de Newton puis identification dans le repère de Frenet) établit elle aussi l'uniformité et reste acceptable ; la question s'appuyait ici sur les deux documents, donc sur les seules observations.

2. Validité de la troisième loi de Kepler

La troisième loi affirme que T^2/a^3 est le même pour toutes les planètes d'un même astre, autrement dit que T^2 est **proportionnel** à a^3 . La vérifier, c'est donc appliquer aux sept points le test de la fiche **M3**, qui impose deux contrôles et non un seul.

Les points sont-ils alignés ? Le coefficient de détermination vaut $R^2 = 0,9999999$, extrêmement proche de 1 ; l'agrandissement de la figure 1 montre que les quatre planètes internes, tassées près de l'origine sur le panneau de gauche, s'alignent elles aussi sans courbure. L'alignement est donc excellent sur tout le domaine, et non sur une seule portion.

La droite passe-t-elle par l'origine ? L'ordonnée à l'origine vaut

$$|b| = 7,9 \times 10^{-3} \text{ j}^2 < u(b) = 2,0 \times 10^{-2} \text{ j}^2,$$

elle est donc **compatible avec zéro**. Elle est en outre totalement négligeable devant les carrés de périodes mesurés, qui s'échelonnent de 2,28 à 352 j².

Les deux conditions étant réunies, T^2 est bien proportionnel à a^3 :

$$T^2 = k a^3, \quad k = 1,486 \times 10^6 \text{ j}^2 \cdot \text{u.a.}^{-3}.$$

Les sept planètes partagent donc une même constante T^2/a^3 : **la troisième loi de Kepler est valide pour le système de TRAPPIST-1**. Énoncée pour les planètes du Soleil, elle se vérifie sur un système stellaire entièrement différent — mais avec une constante qui lui est propre, comme la question suivante va le montrer.

3. Masse de l'étoile TRAPPIST-1

L'expression de la constante. Le système étudié est une planète de masse m , dans le référentiel lié au centre de TRAPPIST-1, supposé galiléen ; la seule force retenue est l'attraction gravitationnelle de l'étoile. En notant $\vec{u}$ le vecteur unitaire dirigé de l'étoile vers la planète, la deuxième loi de Newton donne

$$\vec{a} = -G \frac{M_\star}{r^2} \vec{u}.$$

L'accélération est purement normale : sa composante tangentielle est nulle, ce qui confirme le caractère uniforme du mouvement, et l'identification des composantes normales dans le repère de Frenet donne

$$\frac{v^2}{r} = G \frac{M_\star}{r^2}, \quad v = \sqrt{\frac{GM_\star}{r}}.$$

Le tour complet étant parcouru à vitesse constante, $v = 2\pi r/T$, d'où

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM_\star}}, \quad \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\star}.$$

Ce rapport ne dépend que de l'astre central : c'est exactement la constante k mesurée à la question 2. On en tire, littéralement d'abord :

$$M_\star = \frac{4\pi^2}{Gk}.$$

Conversion en unités du système international. Avec $1 \text{ j} = 86\,400 \text{ s}$ et $1 \text{ u.a.} = 1,496 \times 10^{11} \text{ m}$:

$$k = 1,486 \times 10^6 \times \frac{(86\,400)^2}{(1,496 \times 10^{11})^3} = 3,313 \times 10^{-18} \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-3}.$$

Application numérique.

$$M_\star = \frac{4\pi^2}{6,67 \times 10^{-11} \times 3,313 \times 10^{-18}} = 1,79 \times 10^{29} \text{ kg}.$$

Incertitude. La relation admise transporte directement l'incertitude de la pente :

$$\frac{u(M_\star)}{M_\star} = \frac{u(k)}{k} = \frac{0,039}{1,486} = 2,6 \times 10^{-2}, \quad u(M_\star) = 1,79 \times 10^{29} \times 2,6 \times 10^{-2} = 4,7 \times 10^{27} \text{ kg}.$$

En arrondissant l'incertitude à un chiffre significatif par excès et la valeur au même rang :

$$M_\star = (1,79 \pm 0,05) \times 10^{29} \text{ kg}.$$

Situation par rapport au Soleil.

$$\frac{M_\star}{M_\odot} = \frac{1,79 \times 10^{29}}{1,989 \times 10^{30}} = 9,0 \times 10^{-2},$$

soit environ **un onzième de la masse du Soleil**. TRAPPIST-1 est une naine rouge, proche de la masse minimale nécessaire pour qu'une étoile s'allume.

Contrôle. Le cours donne pour les planètes du Soleil $k_\odot = 1,34 \times 10^5 \text{ j}^2 \cdot \text{u.a.}^{-3}$. Le rapport $k/k_\odot = 1,486 \times 10^6 / 1,34 \times 10^5 = 11,1$: la constante de TRAPPIST-1 est onze fois plus grande que celle du Soleil, exactement dans le rapport inverse des masses, comme l'exige $k = 4\pi^2/(GM)$. La constante de la troisième loi n'est donc pas universelle : elle mesure l'astre central.

4. Pourquoi une année de six jours

La question 3 a établi, pour toute planète de ce système,

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_\star} r^3, \quad \text{soit} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM_\star}}.$$

La période ne dépend donc que de deux grandeurs : le rayon de l'orbite et la masse de l'astre central. Comparons la planète e à la Terre en formant le rapport de leurs périodes, ce qui évite toute conversion :

$$\frac{T_e}{T_\oplus} = \left(\frac{r_e}{r_\oplus} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{M_\odot}{M_\star}}.$$

Les deux facteurs jouent en sens contraire.

La petitesse de l'orbite raccourcit l'année. La planète e orbite à $r_e = 0,02925$ u.a., soit 34,2 fois plus près de son étoile que la Terre ne l'est du Soleil. Comme la période varie en $r^{3/2}$:

$$(0,02925)^{3/2} = 5,00 \times 10^{-3},$$

un facteur 200 gagné.

La faible masse de l'étoile l'allonge. TRAPPIST-1 est 11,1 fois moins massive que le Soleil, ce qui multiplie la période par $\sqrt{11,1} = 3,33$.

Le premier effet l'emporte largement :

$$\frac{T_e}{T_\oplus} = 5,00 \times 10^{-3} \times 3,33 = 1,67 \times 10^{-2}, \quad T_e = 1,67 \times 10^{-2} \times 365 = 6,1 \text{ j},$$

ce qui redonne bien la période du document 2.

Ce qu'il faut retenir. À distance égale, une étoile peu massive attirerait moins et imposerait une année plus longue. Mais la masse n'intervient que par sa racine carrée, tandis que le rayon intervient à la puissance $3/2$: le facteur gagné sur la distance écrase celui perdu sur la masse. C'est donc la compacité du système, et non la masse de l'étoile, qui fixe l'ordre de grandeur de l'année.